https://doi.org/10.31891/2219-9365-2023-73-1-1
УДК 621.396.969.1

Остап ЮНАК
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0003-1698-473X
e-mail: ostap.yunak@gmail.com
Богдан СТРИХАЛЮК
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0002-3065-0384
e-mail: bohdan.m.strykhaliuk@lpnu.ua
Михайло КЛИМАШ
Національний університет «Львівська політехніка»
https://orcid.org/0000-0003-2867-1482
e-mail: mykhailo.m.klymash@lpnu.ua

ЕФЕКТИВНІСТЬ РАНДОМІЗОВАНОЮ СИСТЕМОЮ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ НАД ДЕТЕРМІНОВАНОЮ СИСТЕМОЮ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ ПОБУДОВІ ФРАКТАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗДІЛЬНОЮ ЗДАТНІСТЮ

В даній статті піднімається питання аналізу та вибору системи ітераційних функцій для побудови фрактального зображення з обмеженою роздільною здатністю зображення. Розглянуто ефективність використання рандомізованої системи ітераційних функцій (РСІФ) над детермінованою системою ітераційних функцій (ДСІФ) при побудові фрактальних зображень. Виведено формули розрахунку кількості операцій в залежності від роздільної здатності зображення для рандомізованою та детермінованою системою ітераційних функцій. На основі виведених залежностей, побудовано графіки, котрі наглядно демонструють перевагу одного методу над іншим. Виведено формулу ефективності використання РСІФ над ДСІФ, яка прямо пропорційна площі зображення і не залежить від кількості самоподібних фігур першої ітерації. Результати даної статті показують, що використання рандомізованої системи ітераційних функцій дозволить значно зменшити кількість операцій для побудови фрактального зображення, ніж застосування алгоритму детермінованої системи ітераційних функцій. Також аналіз систем ітераційних функцій показав що обрахунок операцій за допомогою рандомізованої системи ітераційних функцій можна виконувати в реальному часі що дуже важливе при формуванні бази даних зображень для навчання нейронних мереж, які в свою чергу повинні виконувати задачу пов'язану з розпізнавання фрактальних структур та об'єктів. Фрактальний аналіз є дуже важливим у сучасних наукових дослідженнях, де потрібно описувати природні та фізичні явища, геометрія яких є дуже складна, тому вибір інструментів для визначення параметрів фрактальної структури є дуже важливим і складним процесом з складними математичними обчисленнями, які можна спростити за допомогою навчення нейронних мереж. Результати роботи ляжуть в основу автоматизованої системи швидкого визначення фрактальної розмірності за допомогою навченних нейронних мереж.

Ключові слова: рандомізована система ітераційних функцій (РСІФ), детермінованою системою ітераційних функцій (ДСІФ), фрактал, ефективність.

Ostap YUNAK, Bohdan STRYKHALIUK, Mykhajlo KLYMASH
Lviv Polytechnic National University

EFFICIENCY OF A RANDOMIZED SYSTEM OF ITERATIVE FUNCTIONS OVER A DETERMINIST SYSTEM OF ITERATIVE FUNCTIONS IN THE CONSTRUCTION OF FRACTAL IMAGES WITH LIMITED RESOLUTION CAPACITY

This article raises the issue of analysis and selection of a system of iterative functions for constructing a fractal image with limited image resolution. The efficiency of using the randomized system of iterative functions (RSIF) over the deterministic system of iterative functions (DSIF) in constructing fractal images is considered. The formulas for calculating the number of operations depending on the image resolution for a randomized and deterministic system of iterative functions are derived. On the basis of the derived dependencies, graphs were constructed that clearly demonstrate the superiority of one method over another. The formula for the efficiency of using RSIF over DSIF is derived, which is directly proportional to the area of the image and does not depend on the number of self-similar figures of the first iteration. The results of this article show that the use of a randomized system of iterative functions will significantly reduce the number of operations for constructing a fractal image, compared to the use of a deterministic system of iterative functions. Also, the analysis of systems of iterative functions showed that the calculation of operations using a randomized system of iterative functions can be performed in real time, which is very important when forming an image database for training neural networks, which in turn must perform the task of recognizing fractal structures and objects Fractal analysis is very important in modern scientific research, where it is necessary to describe natural and physical phenomena whose geometry is very complex, so the choice of tools to determine the parameters of the fractal structure is a very important and complex process with complex mathematical calculations that can be simplified with the help of trained neural networks. networks The results of the work will form the basis of an automated system for determining the fractal dimension using trained neural networks.

Keywords: randomized system of iterative functions (RSIF), deterministic system of iterative functions (DSIF), fractal, efficiency

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Фрактальний аналіз є важливим інструментом у наукових дослідженнях багатьох галузей, таких як фізика, хімія, біологія, економіка та інші. Він дозволяє описати та вивчити складні системи та процеси, які мають складну структуру та повторюються на різних масштабах. Крім того, фрактальний аналіз може бути використаний для моделювання та передбачення поведінки складних систем, наприклад, в економіці та фінансах. За допомогою фрактального аналізу можна вивчити структуру та динаміку фінансових ринків, що дозволяє передбачати майбутні зміни. Один з основних параметрів фрактального аналізу є фрактальна розмірність.

Складність розрахунку фрактальної розмірності залежить від методу, який використовується для її визначення. Для деяких методів, наприклад, методу ящиків (box-counting method), розрахунок фрактальної розмірності може бути досить простим та швидким.

Однак, для більш складних структур, особливо тих, які мають нерегулярну форму або складну структуру на різних масштабах, розрахунок фрактальної розмірності може бути часо- та ресурсоємним, можуть бути використані складні математичні моделі та алгоритми, які вимагають великої обчислювальної потужності.

Крім того, відповідно до теорії хаосу та фракталів, навіть невеликі зміни в початкових умовах можуть призвести до значних змін в структурі та фрактальній розмірності системи, що може ускладнити її розрахунок.

Отже, складність розрахунку фрактальної розмірності залежить від конкретної структури та методу, який використовується для її визначення. В деяких випадках може бути необхідно використовувати складні алгоритми та математичні моделі, що вимагають великої обчислювальної потужності.

Вирішити ці проблеми дозволять нам нейронні мережі, яких за допомогою систем ітераційних функцій можна навчити визначати параметри фракталів та їх фрактальні розмірності. Навчання нейронних мереж потребує обробку великого масиву даних. Пошук даних для навчання це дуже часо- та ресурсоємним процес. На вирішення цієї задачі ми можемо скористатися генерацією фракталів за допомогою систем ітераційних функцій, за допомогою них ми можемо побудувати фрактал та визначити для нього фрактальну розмірність та інші параметри.

Тепер наша проблема полягає в тому який алгоритм побудови фрактальних зображень є більш ефективним для навчання нейронної мережі, так як процес навчання є часо- та ресурсоємним. Від вирішення цієї проблеми буде залежати, який метод ляже в основу в розробці автоматизованої системи для швидкого визначення фрактальної розмірності та інших параметрів фракталу. Це в свою чергу дасть можливість економити ресурси і час у наукових дослідженнях в багатьох галузях.

Аналіз досліджень та публікацій

Детермінована система ітераційних функцій для побудови фрактального зображення спочатку визначає набір початкових значень, яке може бути простим геометричним об'єктом, наприклад квадратом. Потім до цього об'єкту застосовується система ітераційних функцій щоб створити нове зображення першої ітерації. Далі цей процес повторюється кілька разів на інших етапах ітерації, дозволяючи фрактальному зображенню набирати складнішої форми. Складність цього методу полягає у тому що кожен піксель зображення піддається математичним операціям на кожному етапу ітерації для кожної ітераційної функції. Рандомізована система ітераційних функцій включає в себе побудову фрактального зображення піксель за пікселем [1, с. 102-103]. РСІФ не використовує великі масиви пам'яті даних, а алгоритм не потребує значних обчислень[2, с. 68-71]. В десертаційній роботі «Sketch and Project: Randomized Iterative Methods for Linear Systems and Inverting Matrices» аспіранта Роберта Мансела Говера (Robert Mansel Gower) [12] та статті «RANDOMIZED ITERATIVE METHODS FOR LINEAR SYSTEMS» професора Пертера Ріхтаріка (Peter Richtárik) Единбургського університету [13], проаналізовані рандомізовані ітераційні методи, але їхні роботи не дають можливості порівняння з детермінованими ітераційними методами. В книзі «Deterministic algorithm for constructing fractal attractors of iterated function systems» [1], проаналізована детермінована система ітераційних функцій, відсутні методи порівняння з рандомізованою системою ітераційних функцій. Запропонована удосконалена рандомізована система ітераційних функцій описана в статті «Algorithm forming randomized system of iterative functions by based cantor structure» [4] та виведена на неї формула кількості операцій описаної в статті «Побудова фрактального зображення типу "канторів пил", з використанням рандомізованої системи ітераційних функцій» [3], дадуть змогу побудувати графік залежності кількості операцій від роздільної здатності фрактального зображення, провівши деякі нові розрахунки кількості операцій для детермінованої системи ітераційних функцій, в нас появиться можливість порівняти ефективність одного методу побудови фрактальних зображень над іншим.

Виклад основного матеріалу

За ефективність побудови фрактальних зображень будемо брати співвідношення кількостей операцій, які потрібно виконати для побудови одного і того ж фрактального зображення з обмеженою роздільною здатністю (1), буде показувати у скільки разів швидше РСІФ від ДСІФ побудує фрактал:

$$\mathrm{E} = \frac{N_D}{N_R}, \tag{1}$$

де **E –** ефективність побудови фрактального зображень;

$\mathbf{N_D}$ **–** кількість операцій для побудови фрактального зображення за допомогою ДСІФ;

$\mathbf{N_R}$ – кількість операцій для побудови фрактального зображення за допомогою РСІФ;

Для побудови фрактального зображення за допомогою детермінованої системи ітераційних функцій використаємо афінні перетворення площини, де за основу береться фігура і перетворюється в іншу (процес називається ітерацією), утворена фігура знову піддається цьому закону і так дальше, поки не отримаємо необхідну кількість ітерацій фракталу (рис. 1):

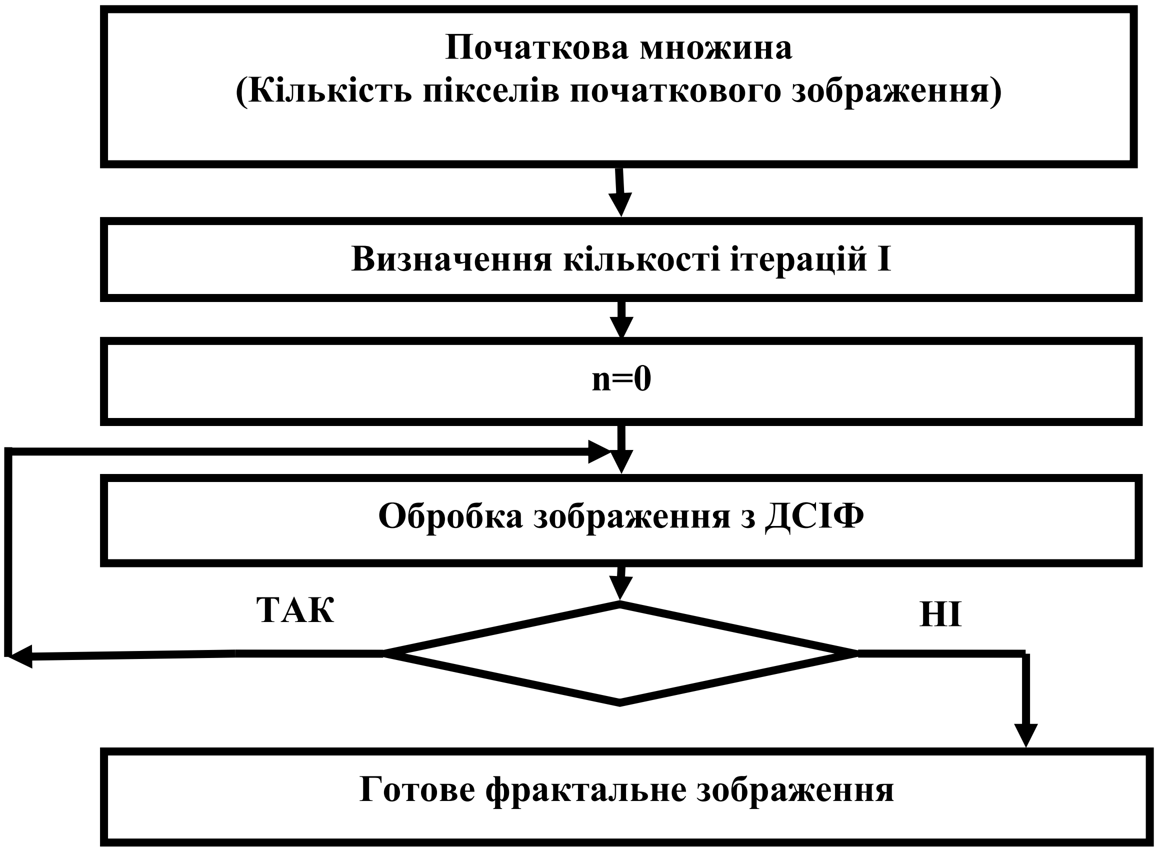

Рис.1 Алгоритм побудови фрактального зображення за допомогою ДСІФ

Результати першої і другої ітерації що виникають при роботі алгоритму побудови детермінованої системи ітераційних функцій зображено на рис. 2 та рис. 3:

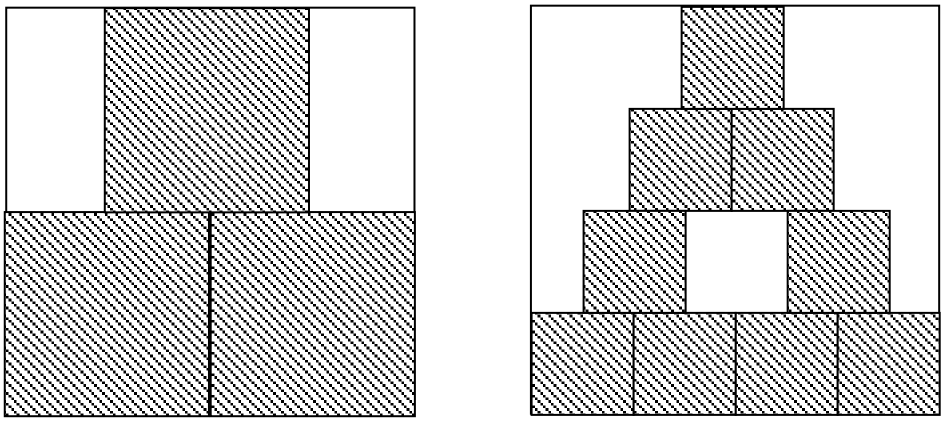

Рис.2 Зображення першої та другої ітерації трикутника Серпінського

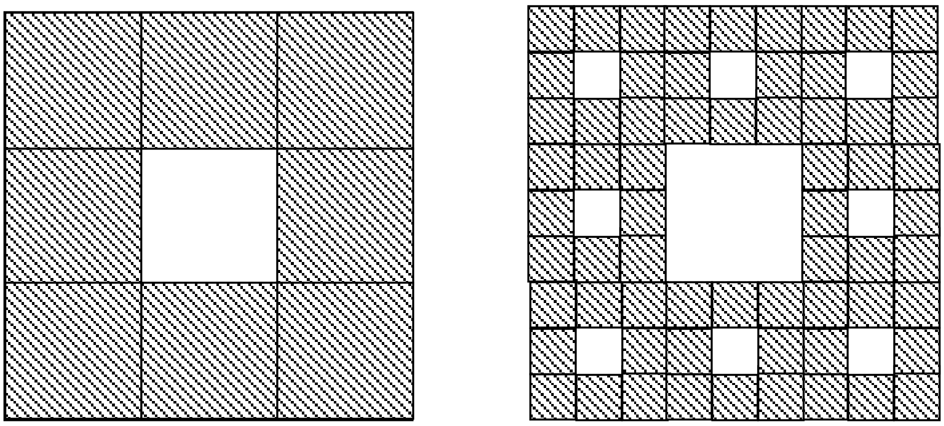

Рис. 3 Зображення першої та другої ітерації квадрату Серпінського

Для того щоб проаналізувати даний алгоритм роботи необхідно знайти кількість ітерацій ***I***, для цього задаємо початкову довжину і ширину зображення ***L***, а довжину і ширину елемента першої ітерації ***l***, після чого знайдемо коефіцієнт пропорційності ***K*** (2):

$$K = \frac{L}{l}, \tag{2}$$

де ***K*** - коефіцієнт пропорційності.

Для того щоб визначити кількість ітерацій треба знати скільки раз буде застосовуватися афінні перетворення, поки остання ітерація не дасть 1 піксель, для цього ми можемо скористатися формулою (3):

$$\frac{L}{K^I} = 1, \tag{3}$$

З цієї формули визначимо кількість ітерацій ***I*** (4-5):

$$L = K^I, \tag{4}$$

$$I = \log_K L, \tag{5}$$

Наступним кроком визначимо кількість операцій N_{D1} необхідної для побудови першої ітерації фрактального зображення за допомогою ДСІФ з врахуванням кількості самоподібних фігур першої ітерації n (6):

$$N_{D1} = L^2 \cdot n, \tag{6}$$

де n - кількості самоподібних фігур першої ітерації рис.2-3.

Відповідно щоб виконати побудову фракталу з I кількістю ітерацій використаємо наступний вираз (7):

$$N_D = L^2 \cdot n^I, \tag{7}$$

Підставивши формулу (5) у формулу (7), ми отримаємо кількість операцій яку потрібно виконати щоб побудувати фрактальне зображення з обмеженою роздільною здатність за допомого ДСІФ (8):

$$N_D = L^2 \cdot n^{\log_K L}, \tag{8}$$

де N_D – кількість операцій для побудови фрактального зображення за допомогою ДСІФ;

K - коефіцієнт пропорційності;

n - кількості самоподібних фігур першої ітерації;

L - початкову довжина і ширина зображення.

Для побудови фрактального зображення за допомогою рандомізованої системи ітераційних функцій РСІФ [3]:

$$N_I = L^2 \cdot \left(\frac{n}{K^2}\right)^{\log_K L} \tag{9}$$

Наведемо графіки залежності кількості операцій від довжини зображення при заданих параметрах n та K для трикутника та квадрата Серпінського рис.4, рис. 5:

Як видно з графіків рис.4, рис. 5, для побудови фрактальних зображень за допомогою ДСІФ потребує дуже багато значних обчислень та потужностей ніж побудова за допомогою РСІФ.

Визначимо ефективність використання РСІФ над ДСІФ підставивши у формулу (1) формули (8-9):

$$\mathrm{E} = \frac{N_D}{N_R} = \frac{L^2 \cdot n^{\log_K L}}{L^2 \cdot \left(\frac{n}{K^2}\right)^{\log_K L}} = \frac{n^{\log_K L} \cdot K^{2\log_K L}}{n^{\log_K L}} = K^{2\log_K L} = K^{\log_K L^2} = L^2,$$

$$E = L^2 = S \tag{10}$$

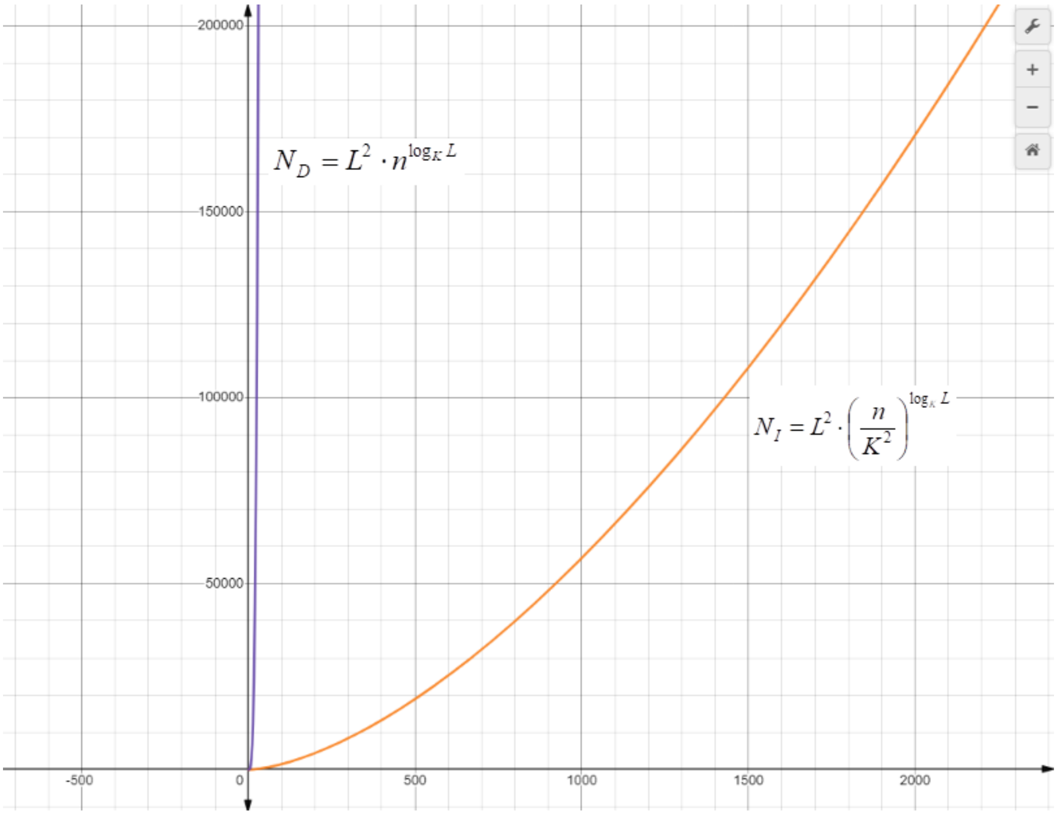

Рис.4 Графіки залежності кількості операцій ДСІФ та РСІФ від довжини зображення для трикутника Серпінського з параметрами n=3, K=2.

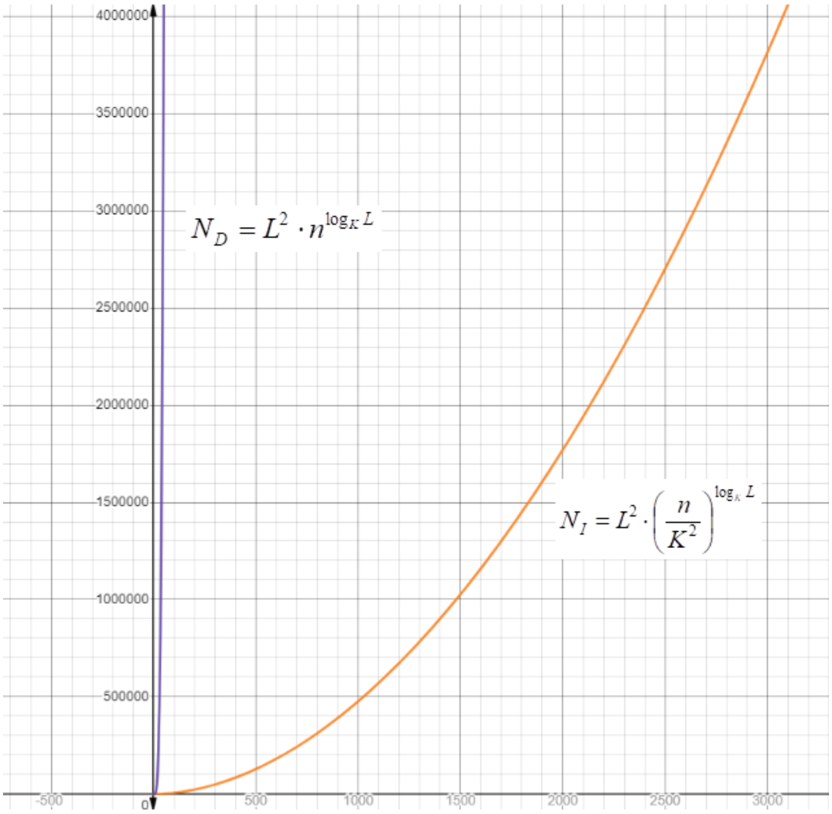

Рис.5 Графіки залежності кількості операцій ДСІФ та РСІФ від довжини зображення для квадрату Серпінського з параметрами n=8, K=3.

Якщо довжина і ширина зображення будуть відрізнятися, аналогічними розрахунками ми отримаємо наступний результат (11):

$$E = L_X \cdot L_Y = S \tag{11}$$

де **E –** ефективність побудови фрактального зображень РСІФ над ДСІФ;

L_X, L_Y – довжина та ширина фрактального зображення;

S – Роздільна здатність (в пікселях) фрактального зображення.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальшого розвитку у даному напрямі

Провівши розрахунки кількості операцій для побудови фрактального зображення обмеженого роздільною здатністю та побудувавши графіки залежності стає очевидним перевагу використання рандомізованої системи ітераційних функцій РСІФ над детермінованою системою ітераційних функцій ДСІФ. Результати показали що ефективність на пряму залежить від роздільної здатності зображення. Для розробки систем генерування фрактальних зображень, явно переважає РСІФ, так як не потребує значних обчислень та великого об'єму пам'яті, що в свою чергу дозволить підготувати матеріали для машинного навчання, для розпізнавання графічних об'єктів визначення фрактальної розмірності та інших параметрів фракталу. Швидкість роботи РСІФ дозволить виконати поставленні задачі у реальному часі, що неможливо б було зробити при ДСІФ. Фрактальний аналіз є дуже важливим у сучасних наукових дослідженнях, де потрібно описувати природні та фізичні явища, геометрія яких є дуже складна, тому вибір інструментів для визначення параметрів фрактальної структури є дуже важливим і складним процесом з складними математичними обчисленнями, які можна спростити за допомогою навчених нейронних мереж. Результати роботи ляжуть в основу автоматизованої системи швидкого визначення фрактальної розмірності за допомогою навчених нейронних мереж.

Література

1. Al-shameri, W.F.H. Deterministic algorithm for constructing fractal attractors of iterated function systems. Eur. J. Sci. Res. 2015, 134, 121–131.
2. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature; W.H. Freeman & Company: New York, NY, USA, 1999.
3. Юнак О. М., Стрихалюк Б. М., Климаш М. М., Шпур О. М. Побудова фрактального зображення типу "канторів пил", з використанням рандомізованої системи ітераційних функцій // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering = Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія. – 2022. – Vol. 2, № 1. – P. 19–25.
4. Yunak O., Shpur O., Strykhaliuk B., Klymash M. Algorithm forming randomized system of iterative functions by based cantor structure // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering = Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія. – 2021. – Vol. 1, № 2. – P. 71–80.
5. M.C. Gutzwiller, Benoît B. Mandelbrot, C.J.G. Evertsz, et al. Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. Springer New York, 2010, ISBN: 1441918973.
6. Yunak O. Protection of documents with the help of fractal images formed by a randomized system of iterating functions // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering = Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія. – 2022. – Vol. 2, № 2. – P. 50–57.
7. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature; Echo Point Books & Media, LLC, ISBN-10: 1648370403, 2021. – 490
8. Юнак О.М., Пелещак Б.М., Охремчук Н.Л., Метлевич Я.Р. Перетворення зображення фрактальної структури типу «Фрактальна пиль» (Множина кантора) в рандомізовану систему ітераційних фунцій, XII Міжднародна науково практична конференція «Последните постижения на Европейската наука - 2016», Том 13, София «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2016.-90с.
9. Z.Z. Falconer, Kenneth Falconer. Techniques in Fractal Geometry. Wiley & Sons, Incorporated, John. ISBN:0471957240. 1997. – 274 c.
10. Mandelbrot, B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension, Echo Point Books & Media; Reprint ed. edition 2020. – 656 c.
11. The Mandelbrot Set and Beyond New York: Springer; 2004. 308 pages, ISBN 0-387-20158-0.
12. Robert Mansel Gower. Sketch and Project: Randomized Iterative Methods for Linear Systems and Inverting Matrices, School of Mathematics, The University of Edinburgh, 2016 – 161
13. ROBERT M. GOWER AND PETER RICHT´ARIK. RANDOMIZED ITERATIVE METHODS FOR LINEAR SYSTEMS, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. – 2015. - Vol. 36, No. 4, pp. 1660–1690

References

1. Al-shameri, W.F.H. Deterministic algorithm for constructing fractal attractors of iterated function systems. Eur. J. Sci. Res. 2015, 134, 121–131.

2. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature; W.H. Freeman & Company: New York, NY, USA, 1999.

3. Ostap Yunak, Bohdan Strykhaliuk1, Mykhailo Klymash, Shpur Olha. DETERMINATION OF THE NUMBER OF PIXELS OF THE FRACTAL IMAGE OF THE "CANTOR DUST" TYPE, FORMED WITH THE HELP OF A RANDOMIZED SYSTEM OF ITERATING FUNCTIONS (RSIF), LIMITED IN RESOLUTION CAPACITY // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering. – 2022. – Vol. 2, № 1. – P. 19–25.

4. Yunak O., Shpur O., Strykhaliuk B., Klymash M. Algorithm forming randomized system of iterative functions by based cantor structure // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering = Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія. – 2021. – Vol. 1, № 2. – P. 71–80.

5. M.C. Gutzwiller, Benoît B. Mandelbrot, C.J.G. Evertsz, et al. Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. Springer New York, 2010, ISBN: 1441918973.

6. Yunak O. Protection of documents with the help of fractal images formed by a randomized system of iterating functions // Infocommunication Technologies and Electronic Engineering = Інфокомунікаційні технології та електронна інженерія. – 2022. – Vol. 2, № 2. – P. 50–57.

7. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature; Echo Point Books & Media, LLC, ISBN-10: 1648370403, 2021. – 490

8. Yunak O.M., Peleshchak B.M., Okhremchuk N.L., Metlevych Ya.R. Peretvorennia zobrazhennia fraktalnoi struktury typu «Fraktalna pyl» (Mnozhyna kantora) v randomizovanu systemu iteratsiinykh funtsii, XII Mizhdunarodna naukovo praktychna konferentsiia «Poslednyte postyzhenyia na Evropeiskata nauka - 2016», Tom 13, Sofyia «Bial HRAD-BH» OOD, 2016.-90s.

9. Z.Z. Falconer, Kenneth Falconer. Techniques in Fractal Geometry. Wiley & Sons, Incorporated, John. ISBN:0471957240. 1997. – 274 с.

10. Mandelbrot, B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension, Echo Point Books & Media; Reprint ed. edition 2020. – 656 с.

11. The Mandelbrot Set and Beyond New York: Springer; 2004. 308 pages, ISBN 0-387-20158-0.

12. Robert Mansel Gower. Sketch and Project: Randomized Iterative Methods for Linear Systems and Inverting Matrices, School of Mathematics, The University of Edinburgh, 2016 – 161

13. ROBERT M. GOWER AND PETER RICHT´ARIK. RANDOMIZED ITERATIVE METHODS FOR LINEAR SYSTEMS, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. – 2015. - Vol. 36, No. 4, pp. 1660–1690