

БЕЛЗЕЦЬКИЙ Руслан

Вінницький національний технічний університет

<https://orcid.org/0000-0003-1574-8831>

e-mail: belzetskiyruslan@gmail.com

МИДИНСЬКИЙ Геннадій

Вінницький національний технічний університет

<https://orcid.org/0009-0006-0715-2789>

e-mail: stajor33@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА КОМП'ЮТЕРНА ПРОГРАМА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ НАВЧАЛЬНОГО РОБОТА- МАНІПҮЛЯТОРА

У статті подано математичний опис методу розв'язання оберненої задачі кінематики навчального робота-маніпулятора та запропоновано алгоритм визначення його узагальнених координат на основі заданого положення й орієнтації робочого органа. Розроблений підхід також дозволяє обчислювати просторові координати об'єктів відносно базової системи координат, що забезпечує коректне позиціонування маніпулятора у робочому просторі. Запропонований метод може бути використаний під час аналізу, проектування та програмування робототехнічних систем різного призначення.

Суть методу полягає у формуванні системи кінематичних рівнянь та чисельному розв'язанні прямої задачі кінематики для кожної ланки робота-маніпулятора з наперед заданою точністю. Після цього обчислюється похибка як сума відхилень між заданими та розрахованими координатами. Значення узагальнених координат робота визначаються шляхом мінімізації цієї похибки та досягнення максимального наближення до заданого положення робочого органа. Запропонований підхід забезпечує однозначний розв'язок оберненої задачі кінематики для тих конструкцій маніпуляторів, для яких отримання точного аналітичного розв'язку є неможливим або суттєво ускладненим.

Показано, що використання чисельних методів дає змогу досягати заданої точності результатів та адаптувати алгоритм до різних кінематичних схем. На основі запропонованого алгоритму розроблено комп'ютерну програму, яка забезпечує автоматизоване визначення координат для орієнтації робота відносно об'єкта або, навпаки, визначення координат об'єкта за відомим положенням робота.

У статті описано принцип функціонування програмного забезпечення та наведено фрагменти програмного коду, що реалізують обчислення координат.

Ключові слова: робот-маніпулятор; математична модель; обернена задача кінематики; DH - параметри; градієнтний метод; критерії стабільності.

BELZETSKYI Ruslan, MYDYNISKYI Hennadii

Vinnitsia National Technical University

MATHEMATICAL MODEL AND COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM OF AN EDUCATIONAL ROBOTIC MANIPULATOR

The article presents a mathematical description of a method for solving the inverse kinematics problem of an educational robot manipulator and proposes an algorithm for determining its generalized coordinates based on a given position and orientation of the end-effector. The developed approach also allows for calculating the spatial coordinates of objects relative to the base coordinate system, which ensures the correct positioning of the manipulator within the workspace. The proposed method can be used in the analysis, design, and programming of robotic systems for various purposes.

The essence of the method lies in forming a system of kinematic equations and numerically solving the direct kinematics problem for each link of the robot manipulator with a pre-specified accuracy. Afterwards, the error is calculated as the sum of deviations between the given and calculated coordinates. The values of the robot's generalized coordinates are determined by minimizing this error to achieve the closest approximation to the specified position of the end-effector. The proposed approach provides a unique solution to the inverse kinematics problem for manipulator designs where obtaining an exact analytical solution is either impossible or significantly complicated.

It is shown that the use of numerical methods allows achieving the desired accuracy of results and adapting the algorithm to various kinematic schemes. Based on the proposed algorithm, a computer program has been developed that enables automated determination of coordinates for orienting the robot relative to an object or, conversely, determining the coordinates of an object given the known position of the robot.

The article describes the operating principle of the software and provides fragments of the program code that implement the coordinate calculations.

Keywords: robot manipulator; inverse kinematics problem; DH - parameters; gradient method; stability criteria.

Стаття надійшла до редакції / Received 16.04.2026

Прийнята до друку / Accepted 12.06.2026

Опубліковано / Published 10.09.2026



This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© БЕЛЗЕЦЬКИЙ Руслан, МИДИНСЬКИЙ Геннадій

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Промислова революція «Індустрія 4.0» зумовила інтенсивний розвиток виробництва і систем промислової автоматизації, зокрема таких технологій, як Інтернет речей (IoT) та інтелектуальні автоматизовані системи. У цьому контексті робототехніка набула статусу одного з ключових компонентів сучасного виробництва, забезпечуючи оптимізацію технологічних процесів, підвищення їх ефективності та розширення виробничих можливостей підприємств. Використання робототехнічних систем у промисловості продемонструвало високу результативність, зокрема що до підвищення продуктивності праці [1].

Однією з основних науково-технічних проблем, що виникають під час реалізації робототехнічних систем, є розв'язання оберненої задачі кінематики, оскільки саме вона забезпечує визначення узгоджених рухів ланок маніпулятора, які дозволяють робочому органу (захоплювачу) досягати заданого положення та орієнтації в робочому просторі. Методи оберненої кінематики дають змогу обчислювати необхідні значення узагальнених координат ланок, що є критично важливим для задач проєктування конструкцій маніпуляторів, планування рухів і подальшого динамічного аналізу робототехнічних систем [2].

Під час аналізу та порівняння методів розв'язання оберненої задачі кінематики зазвичай враховують три основні критерії: ефективність, результативність і різноманітність розв'язків. Ефективність характеризується обчислювальними витратами та часом, необхідним для отримання розв'язку. Результативність визначається точністю знайденого розв'язку в межах заданих допусків. Різноманітність розв'язків полягає у здатності методу знаходити множину допустимих траєкторій руху маніпулятора без потрапляння у сингулярні конфігурації, що підвищує гнучкість і адаптивність робототехнічних систем у різних прикладних задачах [3].

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Аналіз сучасних наукових публікацій свідчить про наявність різноманітних підходів до розв'язання оберненої задачі кінематики роботів-маніпуляторів, які відрізняються математичним апаратом, обчислювальною складністю та галузями застосування.

У роботі [4] для аналізу оберненої кінематики загального 6R-робота використано подвійні кватерніони в поєднанні з результатом Діксона. Автори подали однорідні перетворення у формі подвійних кватерніонів, що дозволило звести задачу до системи подвійних кінематичних рівнянь. Застосування методів лінійної алгебри та результанта Діксона дало змогу отримати одновимірний поліном 16-го степеня, корені якого відповідають можливим розв'язкам оберненої задачі кінематики.

У дослідженні [5] запропоновано підхід, заснований на методах опуклої оптимізації, для розв'язання оберненої задачі кінематики з урахуванням обмежень на кути суглобів у надлишкових послідовних кінематичних ланцюгах зі сферичними шарнірами. Автори сформулювали задачу як задачу пошуку найближчої точки та застосували швидкий алгоритм типу «сума квадратів», який ефективно використовує розріджену структуру кінематичних обмежень. Перевагою методу є можливість сертифікації глобальної оптимальності отриманого розв'язку.

У роботі [6] розглянуто чисельні методи, зокрема оптимізаційні алгоритми та метод Ньютона–Рафсона, які широко застосовуються для розв'язання оберненої задачі кінематики роботів із шістьма ступенями свободи. Хоча ці підходи є універсальними, вони характеризуються значними обчислювальними витратами та ризиком збіжності до локально неоптимальних розв'язків.

Окрему групу підходів становлять аналітичні методи, що інтегрують геометричні та динамічні властивості маніпуляторів. Зокрема, у роботах [3] та [7] акцентується увага на ефективності методу, заснованого на теорії гвинтів, яка розглядається як потужний математичний інструмент для кінематичного аналізу механізмів. Такий підхід є особливо доцільним для роботів зі сферичним зап'ястям і дає змогу отримувати точні аналітичні розв'язки.

У роботі [8] обернену задачу кінематики сформульовано як задачу оптимізації та розв'язано з використанням генетичних алгоритмів. Автори застосували як класичний, так і неперервний генетичні алгоритми, орієнтовані на мінімізацію сумарного відхилення траєкторії за відсутності перешкод у робочому просторі. Такий підхід демонструє гнучкість і здатність знаходити розв'язки в умовах складної нелінійності задачі, однак потребує значних обчислювальних ресурсів.

Загалом аналіз досліджень свідчить про відсутність універсального методу розв'язання оберненої задачі кінематики, що зумовлює актуальність подальших досліджень, спрямованих на поєднання аналітичної точності, обчислювальної ефективності та універсальності підходів.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Метою цього дослідження є розв'язання оберненої задачі кінематики та розробка симуляційної програми для навчального робота-маніпулятора, яка буде використовуватися для аналізу та застосування кінематичних рівнянь. Дослідження складатиметься з наступних етапів:



ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Роботизовані маніпулятори складаються з низки суглобів, з'єднаних ланками, що утворюють кінематичний ланцюг. У маніпуляторі з відкритим кінематичним ланцюгом загальна ступінь вільності визначається загальною кількістю зчленувань [9]. Змінна суглоба q_m визначається наступним чином:

$$q_m = [q_1, q_2, q_m, \dots, q_n]^T \quad (1)$$

де кожне значення суглоба q_i з $i = 1, 2, 3, \dots, n$ представляє артикуляцію, а n – загальна кількість ступенів вільності.

Зазвичай для позначення кінематичної пари використовуються обертальний або поступальний шарнір. Значення шарніра q_i – це кут повороту для обертальних шарнірів. У іншому випадку значення шарніра q_i – це зміщення для поступальних шарнірів.

Іншими словами:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{якщо } i \text{ шарнір обертальний} \\ d_i, & \text{якщо } i \text{ шарнір поступальним} \end{cases} \quad (2)$$

Кінематичну модель маніпулятора можна отримати на основі його кінематичного ланцюга (див. рисунок 1). Кожна ланка i представлена однорідною матрицею T_i^{i-1} , яка перетворює систему координат, приєднану до ланки $i-1$, у систему координат ланки i .

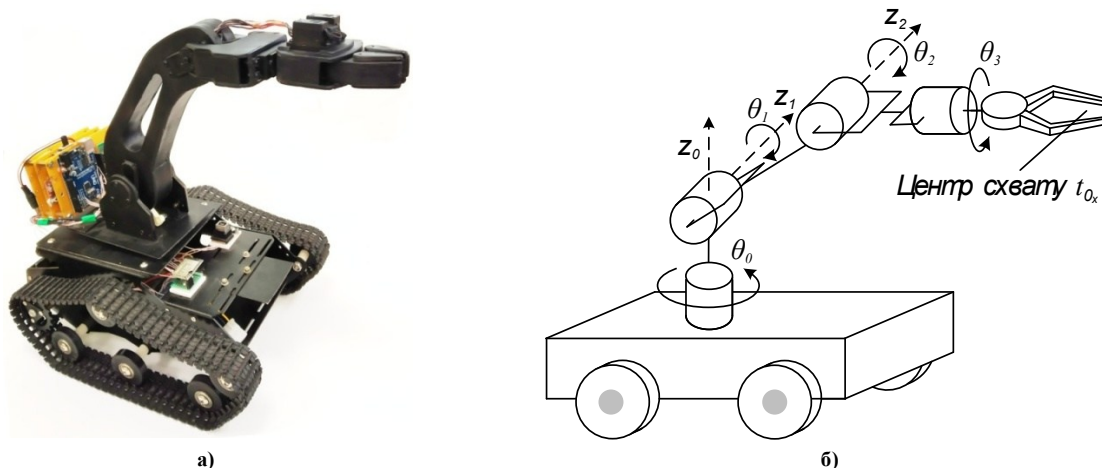


Рис. 1. Загальний вигляд – а, та кінематичного ланцюга – б, чотири осьового робота-маніпулятора

Перетворення T_n^0 , являє собою однорідну матрицю, що містить положення та орієнтацію захоплювача в просторі. Кінематичну модель можна описати за допомогою параметрів Денавіта-Хартенберга (DH), де однорідна матриця T_i^{i-1} виражається як

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

де θ_i – кут повороту навколо осі z_{i-1} (кутове зміщення), a_i – довжина ланки, відстань між осями z_{i-1} і z_i вздовж осі x_i , d_i – зміщення уздовж осі z_{i-1} (лінійне зміщення, постійна величина для обертальних пар), а α_i – кут нахилу між осями z_{i-1} і z_i (постійна величина).

Якщо маніпулятор має обертальне зчленування, то параметр θ_i є узагальненою змінною зчленування, а всі інші параметри залишаються сталими. Якщо ж маніпулятор має поступальне зчленування, то змінною зчленування стає параметр d_i , тоді як решта параметрів залишаються сталими.

Пряма задача кінематики полягає в обчисленні положення та орієнтації захоплювача T_n^0 за заданими узагальненими координатами q_m . Пряму задачу кінематики можна обчислити за формулою

$$T_n^0(q_m) = T_1^0(q_1) \otimes T_2^1(q_2) \otimes T_3^2(q_3) \otimes T_4^3(q_4) = \prod_{j=1}^4 T_j^{j-1}(q_j) \quad (4)$$

де матриця T_n^0 подається у вигляді

$$T_n^0(q_m) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Матриця $T_n^0(q_m)$ складається з вектора положення $t \in \mathbb{R}^3$ та матриці обертання $R \in SO$, які разом описують положення захоплювача маніпулятора відносно базової системи координат. За відомих кутів шарнірів θ_i безпосереднє обчислення за формулою (4) дає положення захоплювача маніпулятора в базовій системі координат.

Через кінематичні обмеження маніпулятори мають межі руху шарнірів, тобто обмеження на кути θ_i . Зазвичай задаються максимальні θ_i^{High} та мінімальні θ_i^{Low} значення кутів обертовальних кінематичних пар [10]:

$$\theta_i^{Low} \leq \theta_i \leq \theta_i^{High}, i = 1, \dots, 4. \quad (6)$$

Щоб задати роботу-маніпулятору переміщення з точки **A** в точку **B**, нам потрібна обернена залежність, тобто необхідно знайти змінні зчленувань θ_i через координати x та y точки **B**. Саме це і є задачею **оберненої кінематики**.

Інакше кажучи, задавши x та y у рівняннях прямої кінематики (4, 5), необхідно розв'язати їх відносно кутів зчленувань. Оскільки рівняння прямої кінематики є нелінійними, знайти розв'язок може бути достатньо складно, і, як правило, він є не один.

У випадку представлення чотириосового робота-маніпулятора (рисунок 1) у вигляді дволанкового плоского механізму розв'язок може бути відсутнім, якщо задані координати (x, y) знаходяться поза зоною досяжності маніпулятора. Якщо ж координати (x, y) лежать у межах досяжності маніпулятора, то можливі два розв'язки, як показано на рисунку 2, – так звані конфігурації «**лікоть вгору**» та «**лікоть вниз**». Також може існувати рівно один розв'язок, якщо для досягнення точки маніпулятор повинен бути повністю випрямлений [11].

Розглянемо схему, наведену на рисунку 3. Застосувавши закон косинусів, бачимо, що кут θ_2 визначається як

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{2\alpha_1\alpha_2} := D. \quad (7)$$

Тоді θ_2 можна визначити як

$$\theta_2 = \cos^{-1}(D). \quad (8)$$

У деяких випадках кращим способом знаходження θ_2 є, якщо $\cos \theta_2$ задано виразом (7), то $\sin \theta_2$ визначається як

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - D^2} \quad (9)$$

а отже, θ_2 можна знайти за виразом

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{\pm \sqrt{1 - D^2}}{D} \quad (10)$$

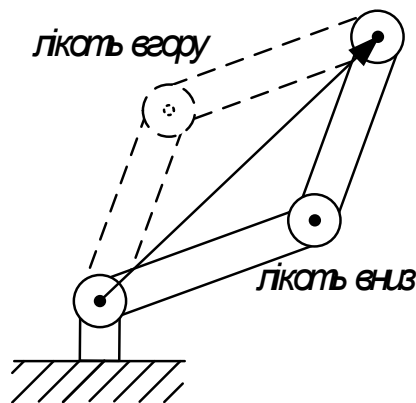


Рисунок 2 — Варіанти розв'язків оберненої кінематики.

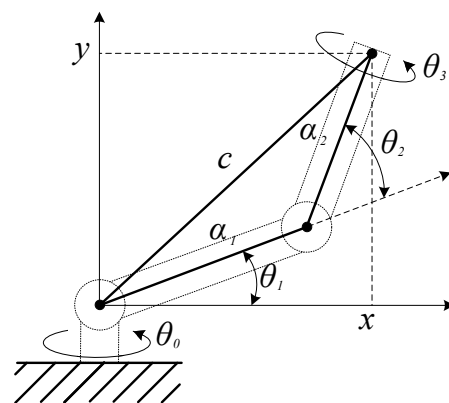


Рисунок 3 — Визначення кутів зчленувань між двома ланками маніпулятора.

Перевага такого підходу полягає в тому, що обидва розв'язки — «**лікоть вгору**» та «**лікоть вниз**» — отримуються шляхом вибору додатного або від'ємного знака у формулі (10) відповідно.

Відповідно, кут θ_1 може бути визначений за формами

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_2 \sin \theta_2}{\alpha_1 + \alpha_2 \cos \theta_2} \right). \quad (11)$$

Зверніть увагу, що кут θ_1 залежить від θ_2 . Це має фізичний зміст, оскільки для різних варіантів розв'язку θ_2 потрібні різні значення θ_1 .

Бажані значення кутів θ_n можуть бути задані як **попередня конфігурація маніпулятора**, що дає

зможу мінімізувати сумарне переміщення приводів для досягнення бажаної орієнтації захоплювача.

Для розв'язання оберненої задачі кінематики робота-маніпулятора необхідно задати бажане положення захоплювача. Шукане положення захоплювача для робота-маніпулятора (рис. 1) визначається як t_{ox}^* .

Далі визначається поточна конфігурація суглобів x усієї системи. Цей вектор подається у вигляді

$$x = [T_j^{j-1}(q_j)]^T, \quad (12)$$

де $x \in \mathbb{R}^j$, а $j=4$ – кількість суглобів маніпулятора, що розглядається у роботі.

Використовуючи поточну конфігурацію суглобів x , положення захоплювача мобільного маніпулятора може бути обчислено за допомогою рівнянь прямої кінематики, наведених у формулах (3) та (4). Отримане положення t_{ox} (рис. 2) використовуються для визначення похибок положення захоплювача маніпулятора у просторі.

Похибка між бажаним положенням t_{ox}^* та фактичним положенням t_{ox} захоплювача маніпулятора визначається як

$$t_{error} = \|t_{ox}^* - t_{ox}\| \quad (13)$$

Для мінімізації руху вводиться похибка між поточною конфігурацією суглобів x та початковою конфігурацією x_0 . Вектор x_0 також може представляти попередню конфігурацію суглобів. Ця похибка визначається як:

$$x_{error} = \|x - x_0\| \quad (14)$$

Отже, функція f , яка враховує похибки положення t_{error} , та похибку руху кінематичних пар x_{error} , задається як

$$f = \alpha t_{error} + \beta x_{error} \quad (15)$$

де α та β — коефіцієнти, що масштабують внесок кожного члена.

Алгоритми роботи програми

Алгоритм роботи програми наведено на рисунку 4.

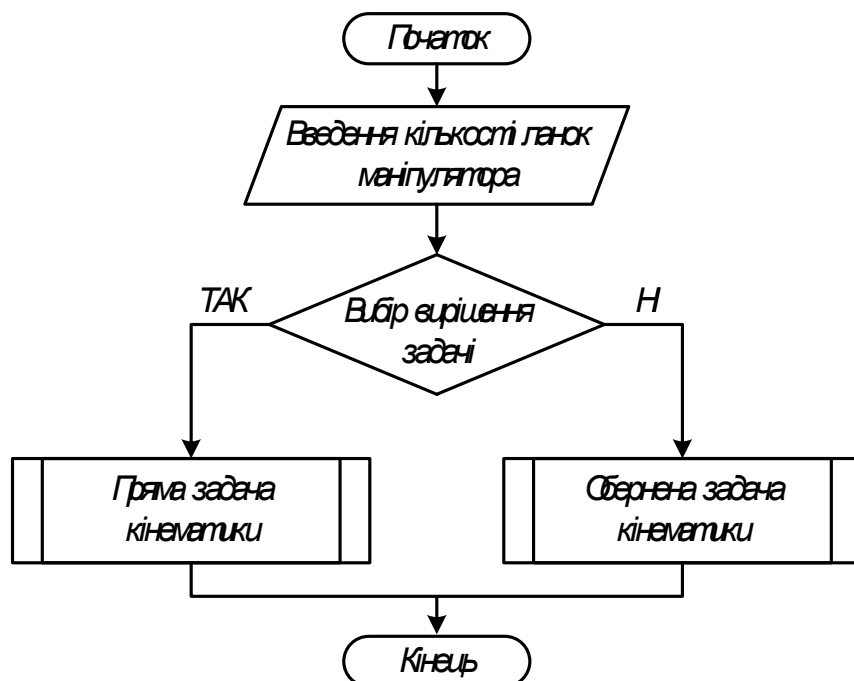


Рис. 4. Алгоритм роботи програми

Алгоритми та програмна реалізація розв'язання прямої задачі кінематики наведено в роботі [12]. Алгоритми розв'язання оберненої задачі кінематики подано на рисунку 5.

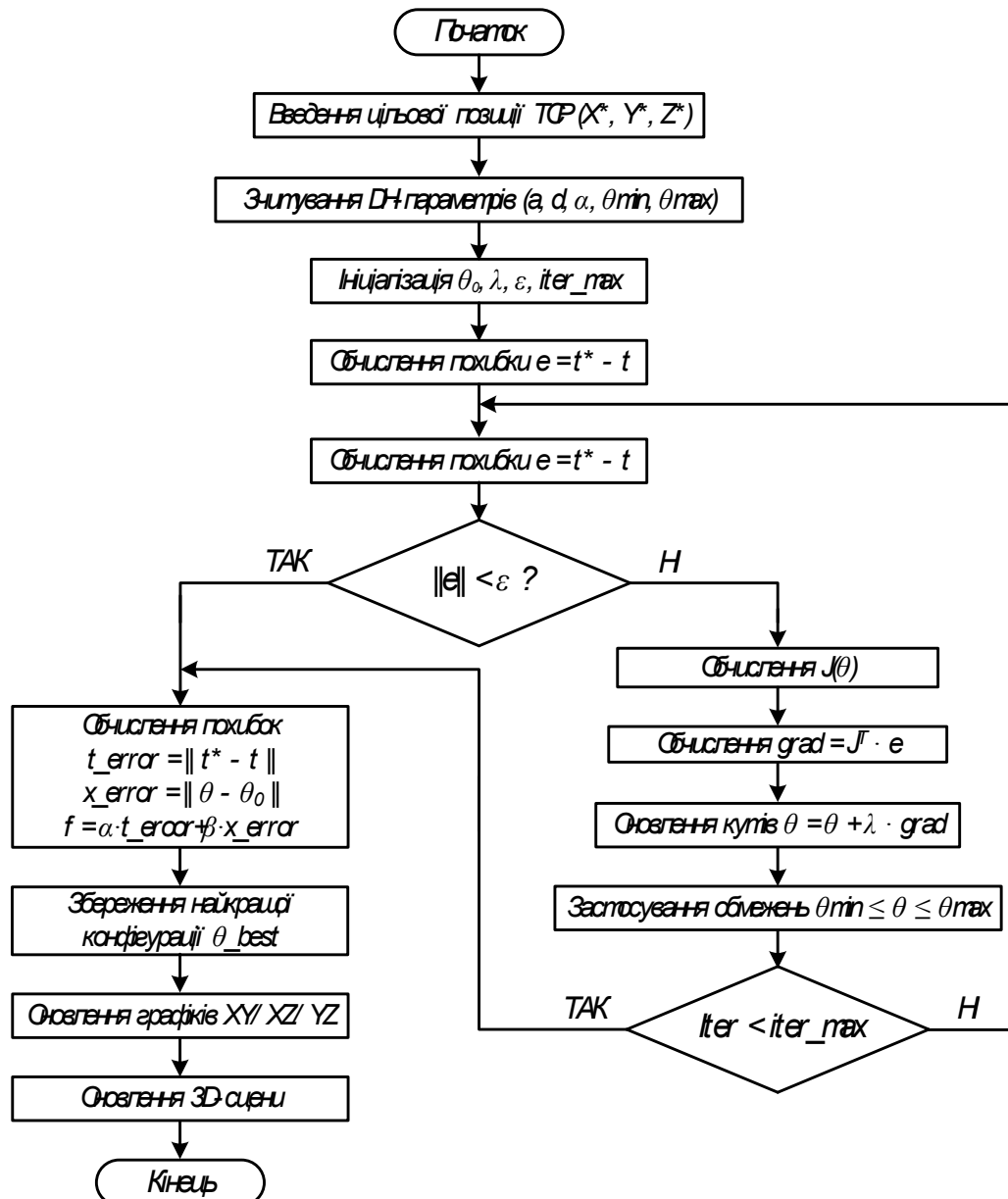


Рис. 5. Алгоритм обчислення оберненої задачі кінематики

Форми та функції програми

Програма призначена для розрахунку оберненої задачі кінематики робота-маніпулятора. Програмний код реалізовано мовою C# у середовищі Visual Studio з використанням WinForms та бібліотеки SharpGL для 3D-візуалізації. Також програмне забезпечення реалізує візуалізацію просторового положення маніпулятора та побудову траєкторій переміщення захоплювача.

Програма складається з трьох форм. Після запуску відкривається головна форма «Розрахунок задач кінематики» (рис. 6), на якій розміщено кнопки вибору розрахунку прямої або оберненої задачі кінематики, а також поле введення кількості ланок.

У разі виборі на формі «Розрахунок задач кінематики» кнопки «Обернена задача кінематики» формується динамічна форма, аналогічна формі для прямої задачі, відповідно до кількості ланок робота.

Вхідними параметрами для розрахунку оберненої задачі кінематики є:

1. задані координати точки простору (x, y, z) , у якій знаходиться або має знаходитись робот;
2. початковий кут повороту робота;
3. параметри ланок робота (довжина ланки, мінімальні та максимальні значення діапазону переміщення);
4. тип руху кожної ланки.

Форма «Обернена задача кінематики» наведена на рисунку 7.

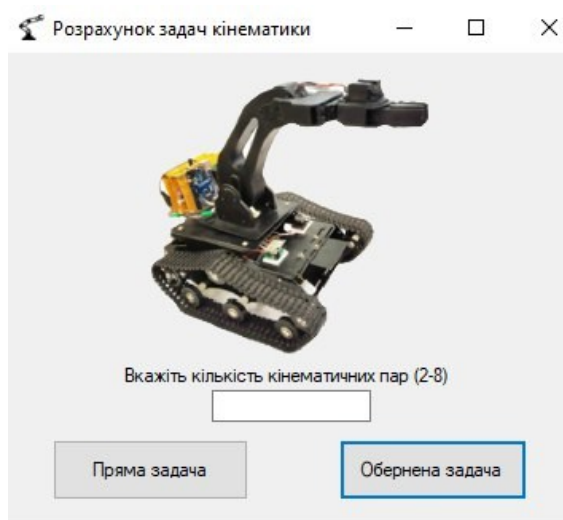


Рис. 6. Головна форма програми.

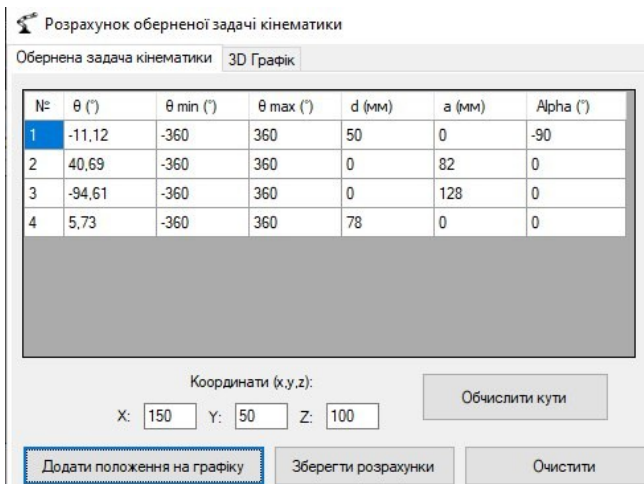


Рис. 7. Форма «Розрахунок оберненої задачі кінематики»

Результати програмних обчислень та симуляція

Нижче представлені результати програмних обчислень оберненої задачі кінематики за заданими координатами точки A з координатами x, y, z (150; 50; 100) (рис. 8).

Кути були знайдені в результаті ітераційного градієнтного розв'язання оберненої задачі кінематики шляхом мінімізації похибки позиціонування. Алгоритм завершує роботу після досягнення умови збіжності, коли градієнт функції помилки наблизився до нуля.

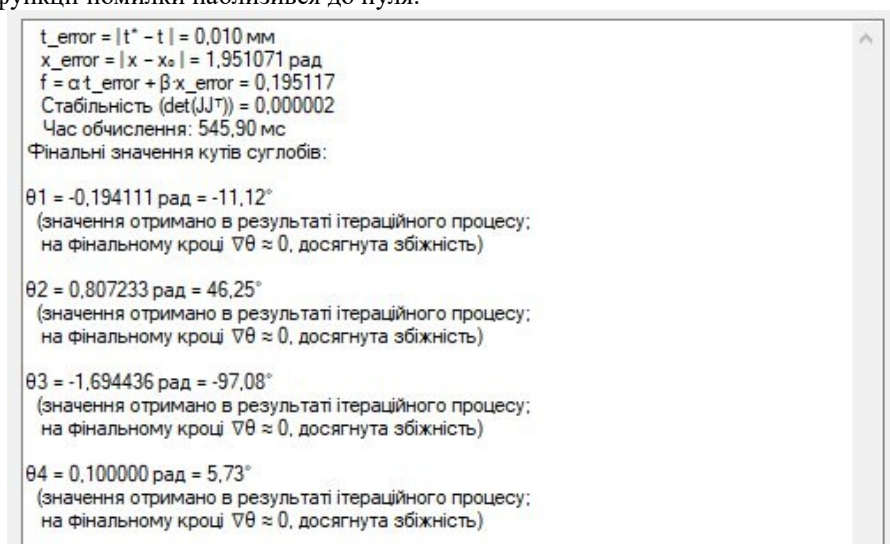


Рис. 8. Результати програмних обчислень оберненої задачі

Програмна емуляція траєкторії руху схвта маніпулятора представлена на рисунку 9 та рисунку 10.

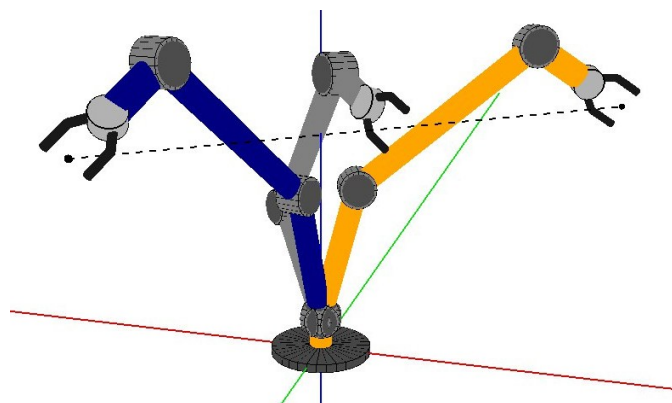


Рис. 9. Траєкторія руху захоплювача маніпулятора з точки A в точку B, в координатах x, y, z.

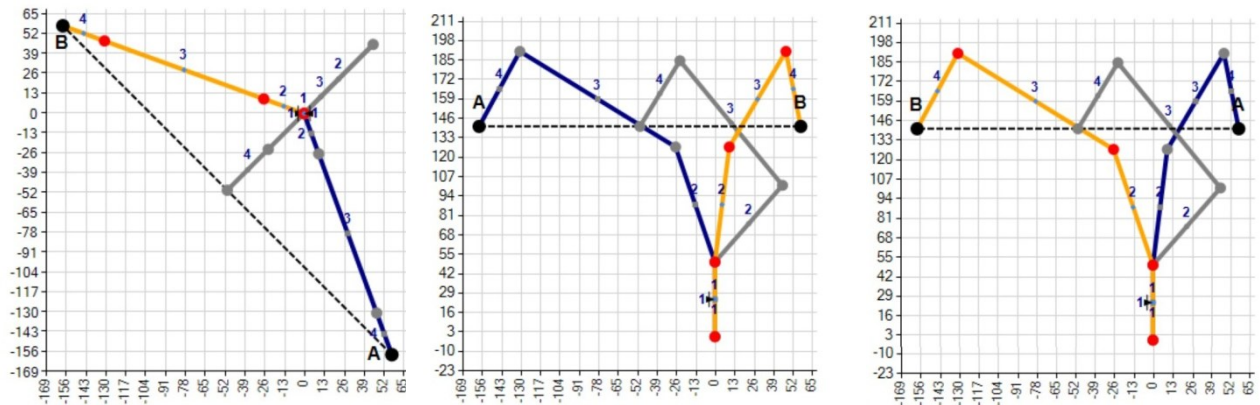


Рис. 10. Трасекторія руху захоплювача маніпулятора з точки А в точку В, в різних площинах

Програмна реалізація окремих функцій

1) Градієнтний метод (обернена кінематика):

n – кількість узагальнених координат;

i – індекс поточної кінематичної пари;

J – матриця Якобі розміром $3 \times n$, що зв'язує швидкості суглобів із лінійною швидкістю робочої точки;

$J[0, i]$ – вплив i -го суглоба на рух по осі X ;

$J[1, i]$ – вплив i -го суглоба на рух по осі Y ;

$J[2, i]$ – вплив i -го суглоба на рух по осі Z ;

$error$ – вектор похибки положення робочої точки;

$error.X, error.Y, error.Z$ – різниця між бажаним і поточним положенням;

$grad$ – компонент градієнта функції помилки за i -м параметром;

$learning$ – коефіцієнт навчання (крок градієнтного методу).

```
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    float grad =
        J[0, i] * error.X +
        J[1, i] * error.Y +
        J[2, i] * error.Z;
    theta[i] += learning * grad;
}
```

2) Критерій стабільності ($\det(J \cdot J^T)$)

J – матриця Якобі розміром $3 \times n$;

JJt – матриця $J \cdot J^T$ розміром 3×3 ;

r – індекс рядка матриці JJt ;

c – індекс стовпця матриці JJt ;

k – індекс кінематичної пари;

$J.GetLength(1)$ – кількість суглобів (n);

det – визначник матриці $J \cdot J^T$;

$JJt[i, j]$ – елемент матриці стабільності.

```
float ComputeStability(float[,] J)
{
    float[,] JJt = new float[3, 3];

    for (int r = 0; r < 3; r++)
        for (int c = 0; c < 3; c++)
            for (int k = 0; k < J.GetLength(1); k++)
                JJt[r, c] += J[r, k] * J[c, k];

    float det =
        JJt[0, 0] * (JJt[1, 1] * JJt[2, 2] - JJt[1, 2] * JJt[2, 1]) -
        JJt[0, 1] * (JJt[1, 0] * JJt[2, 2] - JJt[1, 2] * JJt[2, 0]) +
        JJt[0, 2] * (JJt[1, 0] * JJt[2, 1] - JJt[1, 1] * JJt[2, 0]);

    return det;
}
```


ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК У ДАНОМУ НАПРЯМІ

У статті розроблено та обґрунтовано чисельний метод розв'язання оберненої задачі кінематики навчального робота-маніпулятора, що базується на формуванні системи кінематичних рівнянь і мінімізації похибки між заданим та розрахованим положенням робочого органа. запропонований підхід забезпечує однозначне визначення узагальнених координат маніпулятора з наперед заданою точністю та може бути адаптований до різних кінематичних схем. Практичну ефективність методу підтверджено реалізацією програмного забезпечення, що дозволяє автоматизувати процес позиціонування робота та визначення просторових координат об'єктів, а також результатами державної реєстрації авторського права на відповідну комп'ютерну програму.

Література

1. Javaid M., Haleem A., Singh R. P., Suman R., Gonzalez E. S. Understanding the adoption of Industry 4.0 technologies in improving environmental sustainability // *Sustainable Operations and Computers*. 2022. Vol. 3. P. 203–217 <https://doi.org/10.1016/j.susoc.2022.01.008>
2. Trullo H. D., Vivas Alban O. A. A systematic review of inverse kinematics methods for fixed-base serial manipulators: analytical, numerical, and machine learning methods // *International Journal of Robotics and Control Systems*. 2025. Vol. 5, No. 3. P. 1808–1827. ISSN 2775-2658. URL: <http://pubs2.ascee.org/index.php/ijrcs>
3. Pardos-Gotor J. M. *Screw theory in robotics: an illustrated and practicable introduction to modern mechanics*. — Boca Raton : CRC Press, 2021. — 310 p. <https://doi.org/10.1201/9781003216858>
4. Zhao Z., Wang T., Wang D. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on unit dual quaternion and Dixon resultant // *Proceedings of the 2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. — 2017. — P. 2646–2650. <https://doi.org/10.1109/CAC.2017.8243223>
5. Marić F., Giamou M., Khoubyarian S., Petrović I., Kelly J. Inverse kinematics for serial kinematic chains via sum of squares optimization // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. — 2020. — P. 7101–7107. — <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9196704>
6. Setyawan M. R. H., Dewanto R. S., Marta B. S., Binugroho E. H., Pramadihanto D. Kinematics modeling of six degrees of freedom humanoid robot arm using improved damped least squares for visual grasping // *International Journal of Electrical and Computer Engineering*. — 2023. — Vol. 13, № 1. — P. 288–298. — <https://doi.org/10.11591/ijece.v13i1.pp288-298>
7. Sagar K., Ramadoss V., Zlatanov D., Zoppi M. Storm: Screw theory toolbox for robot manipulator and mechanisms // *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2020)*. — 2020. — P. 7233–7240. — <https://doi.org/10.1109/IROS45743.2020.9340991>
8. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. K. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms // *Applied Mathematics & Information Sciences*. — 2016. — Vol. 10, № 1. — P. 1–9. — <https://doi.org/10.18576/amis/100122>
9. Hernandez-Barragan J., Lopez-Franco C., Arana-Daniel N., Alanis A. Y. Inverse kinematics for cooperative mobile manipulators based on self-adaptive differential evolution // *PeerJ Computer Science*. — 2021. — Vol. 7. — Article e419. — <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.419>
10. Trutman P., Din M. S. E., Henrion D., Pajdla T. Globally optimal solution to inverse kinematics of 7DOF serial manipulator // *IEEE Robotics and Automation Letters*. — 2022. — Vol. 7, № 3. — P. 6012–6019. — <https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3163444>
11. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. — 2nd ed. — Hoboken, NJ : John Wiley & Sons INC, 2004. — 419 p. — ISBN 978-1-119-52399-4. URL: https://www.researchgate.net/profile/Mohamed_Mourad_Lafifi/post/How_to_avoid_singular_configurations/attachment/59d6361b79197b807799389a/AS%3A386996594855942%401469278586939/download/Spong+-+Robot+modeling+and+Control.pdf
12. Белзецкий Р. С. Розв'язання прямої задачі кінематики робота-маніпулятора з чотирма ступенями свободи // *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. — 2025. — № 5. — С. 61–68. — <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2025-182-5-61-68>

References

1. Javaid M., Haleem A., Singh R. P., Suman R., Gonzalez E. S. Understanding the adoption of Industry 4.0 technologies in improving environmental sustainability // *Sustainable Operations and Computers*. 2022. Vol. 3. P. 203–217 <https://doi.org/10.1016/j.susoc.2022.01.008>
2. Trullo H. D., Vivas Alban O. A. A systematic review of inverse kinematics methods for fixed-base serial manipulators: analytical, numerical, and machine learning methods // *International Journal of Robotics and Control Systems*. 2025. Vol. 5, No. 3. P. 1808–1827. ISSN 2775-2658. URL: <http://pubs2.ascee.org/index.php/ijrcs>
3. Pardos-Gotor J. M. *Screw theory in robotics: an illustrated and practicable introduction to modern mechanics*. — Boca Raton : CRC Press, 2021. — 310 p. <https://doi.org/10.1201/9781003216858>
4. Zhao Z., Wang T., Wang D. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on unit dual quaternion and Dixon resultant // *Proceedings of the 2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. — 2017. — P. 2646–2650. <https://doi.org/10.1109/CAC.2017.8243223>

5. Marić F., Giamou M., Khoubyarian S., Petrović I., Kelly J. Inverse kinematics for serial kinematic chains via sum of squares optimization // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. — 2020. — P. 7101–7107. — <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9196704>
6. Setyawan M. R. H., Dewanto R. S., Marta B. S., Binugroho E. H., Pramadihanto D. Kinematics modeling of six degrees of freedom humanoid robot arm using improved damped least squares for visual grasping // *International Journal of Electrical and Computer Engineering*. — 2023. — Vol. 13, № 1. — P. 288–298. — <https://doi.org/10.11591/ijece.v13i1.pp288-298>
7. Sagar K., Ramadoss V., Zlatanov D., Zoppi M. Storm: Screw theory toolbox for robot manipulator and mechanisms // *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2020)*. — 2020. — P. 7233–7240. — <https://doi.org/10.1109/IROS45743.2020.9340991>
8. Momani S., Abo-Hammour Z. S., Alsmadi O. M. K. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms // *Applied Mathematics & Information Sciences*. — 2016. — Vol. 10, № 1. — P. 1–9. — <https://doi.org/10.18576/amis/100122>
9. Hernandez-Barragan J., Lopez-Franco C., Arana-Daniel N., Alanis A. Y. Inverse kinematics for cooperative mobile manipulators based on self-adaptive differential evolution // *PeerJ Computer Science*. — 2021. — Vol. 7. — Article e419. — <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.419>
10. Trutman P., Din M. S. E., Henrion D., Pajdla T. Globally optimal solution to inverse kinematics of 7DOF serial manipulator // *IEEE Robotics and Automation Letters*. — 2022. — Vol. 7, № 3. — P. 6012–6019. — <https://doi.org/10.1109/LRA.2022.3163444>
11. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. — 2nd ed. — Hoboken, NJ : John Wiley & Sons INC, 2004. — 419 p. — ISBN 978-1-119-52399-4. URL: https://www.researchgate.net/profile/Mohamed_Mourad_Lafifi/post/How_to_avoid_singular_configurations/attachment/59d6361b79197b807799389a/AS%3A386996594855942%401469278586939/download/Spong+-+Robot+modeling+and+Control.pdf
12. Belzetskyi R. S. Rozv'iazannia priamoi zadachi kinematyky robota-manipulatora z chotyрма stupeniamy svobody // *Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu*. — 2025. — № 5. — S. 61–68. — DOI: 10.31649/1997-9266-2025-182-5-61-68