

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2026-86-51>

УДК 004.65

ТУРБАЛ Юрій

Національний університет водного господарства та природокористування

<https://orcid.org/0000-0002-5727-5334>

e-mail: [y.v.turbal@nuwm.edu.ua](mailto:y.v.turbal@nuwm.edu.ua)

КУБАЙ Олександр

Національний університет водного господарства та природокористування

<https://orcid.org/0000-0002-2005-487X>

e-mail: [o.v.kubai@nuwm.edu.ua](mailto:o.v.kubai@nuwm.edu.ua)

## ПРО ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ПРОГНОЗІВ У АЛГОРИТМАХ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ ЗА УМОВ ІСНУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ

У статті досліджуються особливості використання послідовностей поліноміальних прогнозів (PPS) в алгоритмах інтелектуального аналізу даних за умов існування збіжності. Актуальність роботи зумовлена необхідністю побудови ефективних короткострокових прогнозів в умовах обмеженого обсягу вибірки та відсутності адекватної апріорної математичної моделі досліджуваного процесу. На відміну від традиційних підходів, що ґрунтуються на використанні одного полінома фіксованого степеня, у роботі запропоновано підхід, який базується на аналізі послідовності однокрокових поліноміальних прогнозів та дослідженні їх збіжності до невідомого прогнозного значення.

Отримано та строго доведено умови збіжності послідовності поліноміальних прогнозів у класичному випадку, коли функція задана у зліченній кількості точок на рівномірній сітці. Для практично важливого випадку скінченних часових рядів запропоновано аналог поняття збіжності та розроблено метод прогнозування, що ґрунтується на інтелектуальному аналізі структури PPS. Уведено нові поняття біноміально-стабільних функцій, умовно біноміально-стабільних функцій та біноміально-стабільних даних, обґрунтовано непорожність відповідних класів і наведено приклади їх представників. Показано, що для умовно біноміально-стабільних функцій збіжність PPS залежить від величини кроку дискретизації; отримано умови на крок сітки, які забезпечують збіжність для окремих класів функцій.

Чисельні експерименти підтвердили теоретичні результати та продемонстрували високу точність запропонованого підходу. Запропоновано алгоритм пошуку збігів у множині поліноміальних прогнозів, який показав ефективність навіть за невеликої довжини PPS. Отримані результати засвідчують перспективність використання послідовностей поліноміальних прогнозів у задачах інтелектуального аналізу даних та відкривають можливості для подальших досліджень у напрямі підвищення стійкості алгоритмів до шуму та узагальнення умов збіжності.

Ключові слова: екстраполяція, поліноміальний прогноз, послідовність поліноміальних прогнозів, збіжність, інтелектуальний аналіз даних, часові ряди, біноміальна стабільність.

TURBAL Yurii, KUBAI Oleksandr

National University of Water and Environmental Engineering

## ON THE PECULIARITIES OF USING POLYNOMIAL PREDICTION SEQUENCES IN INTELLIGENT DATA ANALYSIS ALGORITHMS UNDER CONVERGENCE CONDITIONS

The paper investigates the specific features of using sequences of polynomial predictions (PPS) in intelligent data analysis algorithms under convergence conditions. The relevance of the study is determined by the need to construct efficient short-term forecasts under limited data availability and in the absence of an adequate a priori mathematical model of the underlying process. In contrast to traditional approaches based on a single fixed-degree polynomial, the proposed method relies on analyzing a sequence of one-step polynomial predictions and studying their convergence to an unknown forecast value.

Strict conditions for the convergence of polynomial prediction sequences are obtained and proven in the classical case when a function is given at a countable set of uniformly spaced grid points. For the practically important case of finite time series, an analogue of the convergence concept is introduced, and a forecasting method based on the intelligent analysis of PPS structure is developed. The notions of binomially stable functions, conditionally binomially stable functions, and binomially stable data are introduced. The non-emptiness of the corresponding function classes is justified, and representative examples are provided. It is shown that for conditionally binomially stable functions, the convergence of PPS depends on the grid step size; sufficient conditions on the discretization step ensuring convergence for certain function classes are established.

Numerical experiments confirm the theoretical findings and demonstrate the high accuracy of the proposed approach. An algorithm for detecting coincidences within the PPS set is proposed and shown to be effective even for short sequences. The obtained results indicate the перспективність of applying polynomial prediction sequences in intelligent data analysis tasks and provide a foundation for further research aimed at improving noise robustness and generalizing convergence conditions.

Keywords: extrapolation, polynomial prediction, polynomial prediction sequence, convergence, intelligent data analysis, time series, binomial stability.

Стаття надійшла до редакції / Received 26.03.2026

Прийнята до друку / Accepted 22.04.2026

Опубліковано / Published 31.05.2026



This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons CC-BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© ТУРБАЛ Юрій, КУБАЙ Олександр

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

У сучасному світі, що характеризується високою динамікою змін, невизначеністю та зростаючими обсягами даних, прогнозування стає не просто інструментом планування, а стратегічною необхідністю. Від якості прогнозів залежить ефективність управлінських рішень у бізнесі, економіці, медицині, енергетиці, екології та багатьох інших сферах. Класичні статистичні підходи часто передбачають стаціонарність процесів, достатню кількість даних та чітко визначену модель. Однак дані часто характеризуються великою (або навпаки малою) розмірністю, нелінійністю, наявністю шуму, швидкою зміною структурних закономірностей.

В таких умовах побудова адекватної математичної моделі стає складною або навіть неможливою. Саме тому виникає потреба у застосуванні методів інтелектуального аналізу даних. Методи інтелектуального аналізу даних дозволяють виявляти приховані закономірності без явного задання моделі, працювати з великими масивами різномірних даних, адаптуватися до змін у структурі процесу, підвищувати точність прогнозів у складних нелінійних системах. Завдяки алгоритмам машинного навчання можливе автоматичне налаштування моделей, вибір оптимальних параметрів і самонавчання на нових даних. Це особливо актуально для задач короткострокового та середньострокового прогнозування в умовах обмеженої або неповної інформації.

Останніми роками з'явився цикл публікацій [10]-[12], які присвячені використанню інтерполяційних многочленів для побудови прогнозів у поєднанні з методами інтелектуального аналізу даних. При цьому було запропоновано не безпосереднє використання многочленів певного степеня для побудови прогнозу (адже добре відомо, що за умов відсутності математичної моделі є проблема вибору оптимального степеня многочлена та великих похибок прогнозування), а побудова послідовності усіх можливих поліноміальних прогнозів (PPS) як проміжної множини, яка використовується вже у алгоритмах інтелектуального аналізу. Однак в алгоритмах, які використовують чи оптимальний ступінь многочлена, чи певні усереднення послідовності поліноміальних прогнозів вимагає уточнення випадок, коли має місце тенденція до збіжності послідовності поліноміальних прогнозів. Зокрема, необхідно визначити, чи збігається послідовність саме до потрібного прогнозного значення, за яких умов має місце збіжність та як оптимально визначити границю на практиці за наявності малих виборок експериментальних даних. Саме такі задачі розв'язуються в даній статті.

Таким чином, дослідження випадку збіжності послідовності поліноміальних прогнозів є актуальним науковим завданням, вирішення якого дозволить вдосконалити існуючі методи прогнозування а також виявляти набори даних, коли використання многочленів є недоцільним.

## АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Задача екстраполяції даних посідає важливе місце в сучасних дослідженнях з математичного моделювання та інтелектуального аналізу даних. Вона розглядається як ключовий інструмент короткострокового прогнозування процесів різної природи, зокрема в умовах обмежених вибірок і часткової невизначеності [1–3]. У більшості прикладних задач прогнозування передбачає побудову адекватної моделі процесу, однак за відсутності стаціонарності або за малого обсягу даних класичні підходи моделювання втрачають ефективність. Це зумовлює необхідність розробки алгоритмів, орієнтованих не стільки на відтворення глобальної моделі, скільки на використання локальних закономірностей, зокрема у вигляді послідовностей наближених прогнозів.

Серед традиційних підходів до екстраполяції особливе місце займають методи, що ґрунтуються на інтерполяційних поліномах [7, 10, 11]. Теоретичне підґрунтя їх застосування пов'язане з класичними результатами теорії апроксимації — теоремами про можливість наближення неперервних функцій поліномами на скінченному інтервалі [4, 7]. На цій основі сформульовано евристичний принцип «добре інтерполюємо — обережно екстраполюємо», відповідно до якого якісна інтерполяція розглядається як передумова побудови короткострокового прогнозу. У практичних реалізаціях для екстраполяції застосовувалися інтерполяційні поліноми Ньютона другого роду [3,7], а також узагальнені поліноміальні схеми за системами функцій Чебишева [10].

Разом із тим численні дослідження вказують на обмеженість безпосереднього використання окремого полінома високого степеня для екстраполяції, оскільки похибка прогнозу швидко зростає поза інтервалом інтерполяції. Це стимулювало розвиток альтернативних підходів — аналізу трендів [9], сплайн-екстраполяції [7], методів на основі радіальних базисних функцій, статистичних і байєсівських процедур, а також алгоритмів машинного навчання. У межах інтелектуального аналізу даних дедалі більшої уваги набувають методи, які поєднують елементи апроксимації з алгоритмічним вибором структури моделі.

Окремий напрям досліджень пов'язаний із використанням не одного поліноміального прогнозу, а їх послідовності, побудованої для різних степенів або різних фрагментів вибірки. Такий підхід дозволяє аналізувати поведінку прогнозів як функцію параметра моделі та досліджувати умови їх збіжності. У роботах [10, 11] запропоновано алгоритмічні процедури формування послідовностей однокрокових поліноміальних прогнозів і досліджено їх емпіричні властивості. Показано, що за наявності збіжності таких послідовностей можна отримати стійкіші оцінки майбутніх значень порівняно з використанням одного фіксованого полінома.

У сучасних алгоритмах інтелектуального аналізу даних важливим є питання вибору оптимальної складності моделі. Для поліноміальних методів це зводиться до визначення оптимального степеня полінома. У літературі запропоновано різні критерії такого вибору — від статистичних показників до аналізу структури скінченних різниць. Перспективним виявився підхід, у якому прогноз визначається на основі узгодженості (збіжності) послідовності поліноміальних прогнозів або як їх агрегована характеристика (наприклад, середнє арифметичне за певної стабілізації значень) [13].

Класичні результати теорії апроксимації стверджують, що поліномами можна з довільно заданою точністю наближати будь-яку неперервну функцію на скінченному інтервалі. Зокрема, відповідно до теореми Вейерштраса, для кожної неперервної функції на компактному проміжку існує послідовність поліномів, що рівномірно до неї збігається. Це створює потужне теоретичне підґрунтя для застосування поліноміальних методів у задачах інтерполяції та апроксимації. Однак при переході до екстраполяції ситуація суттєво ускладнюється: навіть незначні похибки в даних або у виборі степеня полінома можуть призводити до різкого зростання помилки поза межами інтервалу спостережень. Поліном, який добре відтворює поведінку функції на відрізку, може демонструвати нестійку та нефізичну поведінку за його межами. Саме ця принципова відмінність між інтерполяцією та екстраполяцією зумовлює необхідність спеціальних алгоритмічних підходів, зокрема аналізу збіжності послідовностей поліноміальних прогнозів, а не використання одного фіксованого наближення.

Таким чином, аналіз літератури свідчить про наявність теоретичних передумов і прикладних результатів, що обґрунтовують доцільність використання послідовностей поліноміальних прогнозів у задачах інтелектуального аналізу даних. Водночас питання формалізації умов їх збіжності, розробки критеріїв прийняття рішення про наявність стабілізації та оцінювання похибки агрегованих прогнозів потребують подальшого дослідження. Саме ці аспекти становлять основу розгляду особливостей використання послідовностей поліноміальних прогнозів в алгоритмах інтелектуального аналізу даних за умов існування збіжності.

## ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

**Метою роботи є** вдосконалення методів прогнозування, що базуються на інтелектуальному аналізі послідовностей поліноміальних прогнозів, шляхом аналізу тенденції до збіжності (наявності збіжності) відповідних послідовностей, ідентифікації випадків збіжності та оцінки граничних значень.

## ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

### Деякі допоміжні математичні результати.

Нехай маємо рівномірну сітку з кроком  $h$ ,  $x_n = x_0 + nh$ ,  $h = \text{const}$ , відомі значення деякої довільної функції у вузлах сітки  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = n, n-1, \dots, n-m+1$ .

Твердження 1. Значення інтерполяційного многочлена степеня  $m-1$  в точці  $x_{n+1}$ , побудованого на основі значень  $\{f_i, i = n, n-1, \dots, n-m+1\}$  може бути знайдене на основі співвідношення:

$$P_{m-1}(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} f_{n-k+1}. \quad (1)$$

де  $\binom{m}{k} = C_m^k$  -біноміальні коефіцієнти.

Доведення цього твердження для інтерполяційного многочлена Н'ютона другого виду (метод інтерполявання назад) наведено в роботі [10]

**Визначення** Послідовністю поліноміальних прогнозів, побудованою на основі множини даних  $Inp = \{f_i, i = n, n-1, \dots, n-m+1\}$  будемо називати послідовність виду:

$$PPS(Inp) = \{P_0(x_{n+1}), P_1(x_{n+1}), \dots, P_{n-m+1}(x_{n+1})\}.$$

Бачимо, що послідовність поліноміальних прогнозів містить усі можливі прогнози на основі многочленів степеня починаючи з 0 і закінчуючи максимально можливим  $m-1$ , якщо задано  $m$  відомих значень у точках інтерполяції.

Прогноз на основі многочлена степеня 0 - це значення, що співпадає з останнім відомих  $f_n$ , степеня 1-лінійний, степеня 2 - параболічний, степеня 3 - кубічний і т. д. При цьому використовуємо дані рухаючись «справа-наліво», аналогічно як у формулі побудови многочлена Н'ютона інтерполяванням назад.

Зауважимо, що навіть тривіальний прогноз на основі многочлена степеня 0 може мати певну строгу математичну інтерпретацію. Дійсно, припустимо, що ми маємо лише одну точку спостережень  $f_n$  в момент часу  $n$  і нічого більше не знаємо про процес чи явище, яке хочемо спрогнозувати. В такому випадку логічно побудувати ймовірнісну модель: невідоме прогнозне значення  $f_{n+1}$  буде випадковою величиною, щільність якої набуває максимального значення в точці  $f_n$ . Наприклад, можемо розглянути нормальний розподіл з

щільністю

$$f_{f_{n+1}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-f_n)^2/(2\sigma^2)}$$

Тоді математичне сподівання такої величини буде  $f_n$ .

Також можемо розглянути  $\alpha$  як випадкову величину, що має рівномірний розподіл на інтервалі  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Відповідний інтервал визначає кут між віссю абсцис та променем, проведеним з точки  $(n, f_n)$  (див. Рис.1). Де промінь перетинає пряму  $x = n+1$  на декартовій площині-там буде і прогнозна значення. Очевидно, що математичне сподівання теж рівне  $f_n$ .

Таким чином, прогноз на основі многочлена 0, що співпадає з відомим значенням, є логічним за умови відсутності будь-якої додаткової інформації про явище, яке досліджується, окрім одної точки спостереження.

Оскільки має місце співвідношення (1), то наведене вище визначення множини поліноміальних прогнозів має конструктивний характер, кожен елемент послідовності визначений:

$$P_{m-1}(x_{n+1}) \equiv \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} f_{n-k+1}.$$

Зауважимо, що теоретично вхідна множина даних може бути нескінченною, тоді нескінченною буде і послідовність поліноміальних прогнозів і можемо говорити про границі.

Співвідношення (1) має надзвичайно важливе практичне значення, оскільки дозволяє будувати прогнозні значення у випадку вибору поліноміальних ліній тренду без використання процедури пошуку усіх коефіцієнтів відповідного многочлена, що зводиться до розв'язку СЛАР. Це швидка формула побудови поліноміального прогнозного значення на один крок вперед на основі будь-яких експериментальних даних за умови рівномірної сітки. Простота формули (1) дозволяє будувати поліноміальні прогнози будь-яких степенів навіть у випадках, коли величина біноміальних коефіцієнтів виходить за межі стандартних типів даних вибраних мов програмування - проста рекурентна формула побудови трикутника Паскаля легко може бути реалізована з використанням рядкових типів даних, так званої «довгої» арифметики.

Окрім того, співвідношення (1) можна використовувати для асимптотичного аналізу поліноміальних прогнозів.

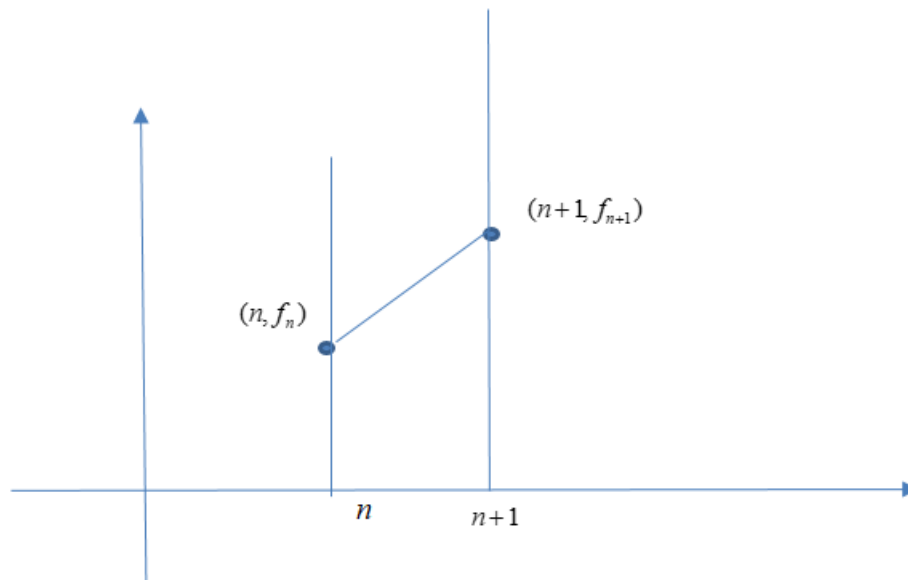


Рис.1. Ілюстрація побудови прогнозного значення на основі однієї точки

Твердження 2. Має місце співвідношення:

$$\sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \binom{m}{l} f_{n-l+1} = f_{n+1} - \Delta^m f_{n-m+1},$$

де  $\Delta^m$  –  $m$ -та скінченна різниця

Доведення

Як відомо, скінченні різниці визначаються наступним чином:

$$\Delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).$$

Нехай маємо рівномірну сітку,  $f(x_0) = f_s$ ,  $f(x_0 + kh) = f_{s+k}$ . Тоді

$$\Delta^n f_s = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_{s+k} \text{ або } \Delta^m f_s = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{s+i}.$$

Звідси  $\Delta^m f_{n-m+1} = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{n-m+1+i}$ .

З останнього співвідношення отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta^m f_{n-m+1} &= \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{n-m+1+i} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{n-m+1+i} + f_{n+1} = |i+1=k| = \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k-1} f_{n-m+k} + f_{n+1} = |-m+k=-l+1, l=1+m-k| = \\ &= \sum_{l=m}^1 (-1)^l \binom{m}{m-l} f_{n-l+1} + f_{n+1}. \end{aligned}$$

Враховуючи очевидні співвідношення  $\sum_{l=m}^1 a_l = \sum_{l=1}^m a_l$ ,  $\binom{m}{m-l} = \binom{m}{l}$  з останнього виразу отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta^m f_{n-m+1} &= \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{n-m+1+i} = \sum_{l=m}^1 (-1)^l \binom{m}{m-l} f_{n-l+1} + f_{n+1} = \\ &= \sum_{l=1}^m (-1)^l \binom{m}{m-l} f_{n-l+1} + f_{n+1} = -\sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \binom{m}{l} f_{n-l+1} + f_{n+1} \end{aligned}$$

Звідси  $\sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \binom{m}{l} f_{n-l+1} = f_{n+1} - \Delta^m f_{n-m+1}$ .

Твердження доведене.

Наслідок 1. Послідовність  $\sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \binom{m}{l} f_{n-l+1}$  збігається при фіксованому значенні  $n$  та  $m \rightarrow \infty$  тоді і тільки тоді, коли існує  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1}$

Наслідок 2. Якщо існує границя  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1} = 0$  то послідовність  $\sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \binom{m}{l} f_{n-l+1}$  збігається при фіксованому значенні  $n$  та  $m \rightarrow \infty$  до значення  $f_{n+1}$ .

**Твердження про збіжність послідовності поліноміальних прогнозів. Поняття біноміально-стабільних функцій та даних**

Використовуючи наведені вище твердження та наслідки, можемо сформулювати основний результат про збіжність послідовності поліноміальних прогнозів до невідомого прогнозного значення функції.

Твердження 3. Нехай задано деяку послідовність значень довільної функції  $Inp = \{f_i = f(x_i), i = n, n-1, \dots, n-m+1, \dots\}$ , визначених у вузлах рівномірної сітки з кроком  $h$ ,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $h = \text{const}$ , значення  $n$ -фіксоване,  $PPS(Inp)$ - послідовність поліноміальних прогнозів, побудована на основі

множини даних  $Inp$ ,  $PPS(Inp) = \{P_0(x_{n+1}), P_1(x_{n+1}), \dots, P_{n-m+1}(x_{n+1}), \dots\}$ ,  $P_{m-1}(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} f_{n-k+1}$ .

Тоді послідовність  $P_m(x_{n+1})$  збігається тоді і тільки тоді, коли існує границя  $m$ -тої скінченної різниці  $\Delta^m f_{n-m+1}$  при фіксованому значенні  $n$ .

При цьому, якщо  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1} = 0$ , то  $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(x_{n+1}) = f_{n+1}$ .

Будемо називати клас усіх функцій, для яких існує  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1} = 0$  при фіксованому  $n$  та довільному кроці сітки  $h$  біноміально стабільним і позначати  $\Xi$ .

Умовно біноміально стабільним будемо називати клас функцій, для яких існують такі значення  $h$ , при яких  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1} = 0$  та значення  $h$ , при яких відповідної границі не існує чи вона рівна  $\infty$ .

Суть цього терміну легко зрозуміти з врахуванням співвідношень:  $\Delta^m f_{n-m+1} = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f_{n-m+1+i}$ ,

$\Delta^{m-1} \Delta f_{n-m+1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-1-i} \binom{m-1}{i} \Delta f_{n-m+1+i}$ . Тобто якщо розглянути біноміально-зважені відповідним чином суми приростів значень функції і вони збігаються, то маємо біноміальну стабільність..

Відповідно, можемо називати вхідні дані (можуть залежати від кроку сітки  $h$ ) виду  $Inp = \{f_i, i = n, n-1, \dots, n-m+1, \dots\}, f_k = f(x_0 + kh)$ , для яких існує  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta^m f_{n-m+1}$  біноміально стабільними.

Наведемо аналог цього визначення для скінченних вхідних даних.

Маємо вхідну множину виду:  $Inp = \{f_i, i = n, n-1, \dots, n-m+1\}$  Будемо називати вхідні дані скінченно біноміально стабільними,  $f_k = f(x_0 + kh)$ , якщо  $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 \mid P_{k+1}(x_{n+1}) - P_k(x_{n+1}) \mid < \mid P_k(x_{n+1}) - P_{k-1}(x_{n+1}) \mid$ .

Зауважимо, що твердження 3 фактично визначає умови, за яких має місце збіжність послідовності поліноміальних прогнозів до відповідного прогнозного значення функції  $f_{n+1}$ . Це дозволяє обґрунтувати метод прогнозування на основі послідовностей поліноміальних прогнозів а також уточнити алгоритми прогнозування в частині вибору прогнозу на основі многочлена максимального степеня. Суть цього підходу полягає в тому, що прогноз на основі многочлена максимального степеня (ступінь залежить від об'єму вхідних даних) будується у випадку наявності біноміально-стабільних вхідних даних.

**Дослідження класу біноміально-стабільних функцій. Умовно біноміально-стабільні функції.**

Розглянемо, наскільки широким є клас біноміально-стабільних функцій, які добре прогнозуються за допомогою поліноміальної екстраполяції.

Приклад 1. Очевидно, що до класу біноміально-стабільних функцій відносяться многочлени будь-яких степенів. Це впливає з властивостей скінченних різниць для многочленів. Легко перевірити, що  $\Delta^m x^j = 0$  для  $j < m$ . Оператор скінченної різниці лінійний. А тому якщо  $f(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ , то  $\Delta^m f = \sum_{j=0}^k a_j \Delta^m x^j$ .

Приклад 2.  $f(x) = e^x$ .

Розглянемо суму  $S_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{n-k+1}$ . Звідси:  $S_m = e^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{-k}$ .

Позначимо  $a = e^{-1}$ . Тоді  $S_m = e^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} a^k$ .

Використаємо відому тотожність:  $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-a)^k = (1-a)^m$ . Звідси  $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} a^k = 1 - (1-a)^m$ . Отже

$S_m = e^{n+1} [1 - (1-e^{-1})^m]$ . Оскільки  $0 < 1 - e^{-1} < 1$ , то  $(1 - e^{-1})^m \rightarrow 0$ . Тому  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = e^{n+1}$ .

Легко отримати аналогічний результат для будь-яких степеневих функцій  $f(x) = a^x, a > 0$ .

Приклад 3.  $f(x) = a^x, a > 1$ .

Розглянемо суму  $S_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} a^{n-k+1}$ . Звідси  $S_m = a^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} a^{-k}$ . Позначимо  $b = a^{-1}$ .

Тоді  $S_m = a^{n+1} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} b^k$ ,  $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} b^k = 1 - (1-b)^m$ . Отже  $S_m = a^{n+1} [1 - (1-1/a)^m]$ .

Оскільки  $0 < 1 - 1/a < 1$ , при  $a > 1$  то  $(1 - e^{-1})^m \rightarrow 0$ . Тому  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = a^{n+1}$ .

Отже, умова збіжності для степеневих функцій – існування границі  $(1 - 1/a)^m$ . Звідси  $\left| \frac{a-1}{a} \right| < 1$  або

$a \geq 1$ .

Зауважимо, що збіжності немає при  $0 < a < 1$ . Дійсно, многочлени не можуть наближати функції, які швидко спадають.

Дослідимо, чи немає залежності у цьому прикладі від кроку сітки. Нехай  $f_n = a^{nh}$ . В такому випадку  $f_n = a^{nh} = (a^h)^n$ . Тоді умова збіжності суми:  $a^h > 1$ . Бачимо, що залежності від величини кроку сітки немає якщо  $a > 1$ , то  $a^h > 1$  для будь-якого додатнього  $h$ .

Отже, показникова функція належить до класу біноміально-стабільних функцій.

Наведемо приклад функції, що належить до класу умовно біноміально стабільних.

Приклад 4.  $f(x) = \cos(\pi hx)$ .

Розглянемо суму  $S_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \cos(\pi h(n-k+1))$ . Має місце співвідношення  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ .

Тоді

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \cos(\pi h(n-k+1)) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (e^{i\pi h(n-k+1)} + e^{-i\pi h(n-k+1)}) / 2 = \\ &= \frac{e^{i\pi h(n+1)}}{2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{-i\pi h k} + \frac{e^{-i\pi h(n+1)}}{2} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} e^{i\pi h k}. \end{aligned}$$

Скористаємось формулою:  $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} z^k = 1 - (1-z)^m$ .

Тоді  $S_m = \frac{e^{i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{-i\pi h})^m) + \frac{e^{-i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{i\pi h})^m)$ .

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{e^{i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{-i\pi h})^m) + \frac{e^{-i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{i\pi h})^m) = \\ &= \frac{e^{-i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{i\pi h})^m) + \frac{e^{-i\pi h(n+1)}}{2} (1 - (1 - e^{i\pi h})^m) = \\ &= \operatorname{Re}(e^{-i\pi h(n+1)} (1 - (1 - e^{i\pi h})^m)) = \\ &= \operatorname{Re}(e^{-i\pi h(n+1)}) - \operatorname{Re}(e^{-i\pi h(n+1)} (1 - e^{i\pi h})^m). \end{aligned}$$

В останньому виразі використали очевидні властивості операції комплексноспряженості:

$$\overline{zy} = \bar{z} * \bar{y}, \overline{a-z} = a - \bar{z}, \overline{z^m} = \bar{z}^m, a \in R, z, y \in C.$$

Нехай  $1 - e^{i\pi h} = z$ . Позначимо  $T_m = e^{-i\pi h(n+1)} z^m$ . Тоді  $S_m = \operatorname{Re}(e^{-i\pi h(n+1)}) - \operatorname{Re} T_m = \cos(\pi h(n+1)) - \operatorname{Re} T_m$ .

Покажемо, що  $\lim_{m \rightarrow \infty} |T_m| = 0$ . Звідси очевидно випливатиме, що  $\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Re} T_m = 0$ .

Маємо:  $1 - e^{i\pi h} = 1 - \cos(\pi h) - i \sin(\pi h)$ ,

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\pi h}|^2 &= (1 - \cos(\pi h))^2 + (\sin(\pi h))^2 = 1 - 2\cos(\pi h) + \cos^2(\pi h) + \sin^2(\pi h) = 2 - 2\cos(\pi h), \\ 2 - 2\cos(\pi h) &= 2(1 - \cos(\pi h)) = 2 \cdot 2 \sin^2(\pi h / 2). \end{aligned}$$

Тоді

$$|1 - e^{i\pi h}| = \sqrt{4 \sin^2(\pi h / 2)} = 2 |\sin(\pi h / 2)|.$$

Звідси  $|1 - e^{i\pi h}|^m = (2 |\sin(\pi h / 2)|)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , якщо  $2 |\sin(\pi h / 2)| < 1$  або  $|\sin(\frac{\pi h}{2})| < \frac{1}{2}$ .

Використовуючи останню нерівність легко перевіряти, при яких значеннях кроку сітки є збіжність, а при яких збіжності немає. Наприклад, при  $h=1$  отримуємо розбіжність  $|T_m|$  а, отже, і  $S_m$ , яку легко перевірити і безпосередньо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\pi x), f_k = \cos(\pi k) = (-1)^k, \\ S_m &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} \cos(\pi h(n-k+1)) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (-1)^{n-k+1} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} = (-1)^n (2^m - 1) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (-1)^n \infty. \end{aligned}$$

Отримана умова показує, що збіжність суттєво може залежати від величини кроку сітки, зокрема, для періодичних функцій. В той же час, наведені приклади підтверджують коректність наведених вище визначень біноміально-стабільних та умовно біноміально-стабільних класів функцій.

Деякі чисельні результати.

Наведемо деякі чисельні результати, які ілюструють отримані вище теоретичні викладки.

В Табл.1 наведено приклад множини поліноміальних прогнозів для функції  $f(x) = e^x$ . В першому рядочку таблиці наведено значення функції в точках 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10, 10.5 відповідно. Для кожного цього значення будується множина поліноміальних прогнозів, вважаючи що воно невідоме. При цьому відомими є усі значення цієї функції у відповідних попередніх вузлах сітки з кроком 0.5. В стовпчиках таблиці відповідно наведені поліноміальні прогнози у відповідних точках на основі многочленів 1, 2, ..., 10 степеня.

Таблиця 1.

Послідовності поліноміальних прогнозів для  $f(x) = e^x$

1096.6	1808.0	2981.0	4914.8	8103.1	13359.7	22026.5	36315.5	Степінь мн.
926.9	1528.1	2519.5	4153.9	6848.6	11291.4	18616.4	30693.2	1
1029.8	1697.9	2799.4	4615.4	7609.5	12545.9	20684.7	34103.3	2
1070.3	1764.7	2909.5	4797.0	7908.9	13039.5	21498.5	35445.1	3
1086.3	1791.0	2952.8	4868.4	8026.7	13233.7	21818.7	35973.0	4
1092.6	1801.3	2969.9	4896.5	8073.0	13310.2	21944.7	36180.7	5
1095.0	1805.4	2976.6	4907.6	8091.3	13340.2	21994.3	36262.5	6
1096.0	1807.0	2979.2	4911.9	8098.4	13352.1	22013.8	36294.6	7
1096.4	1807.6	2980.3	4913.7	8101.3	13356.7	22021.5	36307.3	8
1096.5	1807.9	2980.7	4914.3	8102.4	13358.5	22024.5	36312.3	9
1096.6	1808.0	2980.9	4914.6	8102.8	13359.3	22025.7	36314.2	10

Бачимо, що навіть 10 точок послідовності поліноміальних прогнозів достатньо для прогнозування відповідного значення функції з досить великою точністю. Відносна похибка прогнозу для наведених в таблиці даних становить в середньому 0.0035%. Оптимальний прогноз у цьому випадку – це многочлен максимально-можливого степеня. Адже має місце біноміальна стабільність вхідних даних, усі послідовності поліноміальних прогнозів мають тенденцію до збіжності. На Рис.2 наведено графік поведінки PPS для першого стовпчика Табл.1. Для інших результат буде аналогічним. Скільки б даних ми не мали, многочлен найбільшого степеня завжди даватиме найкращий прогноз.

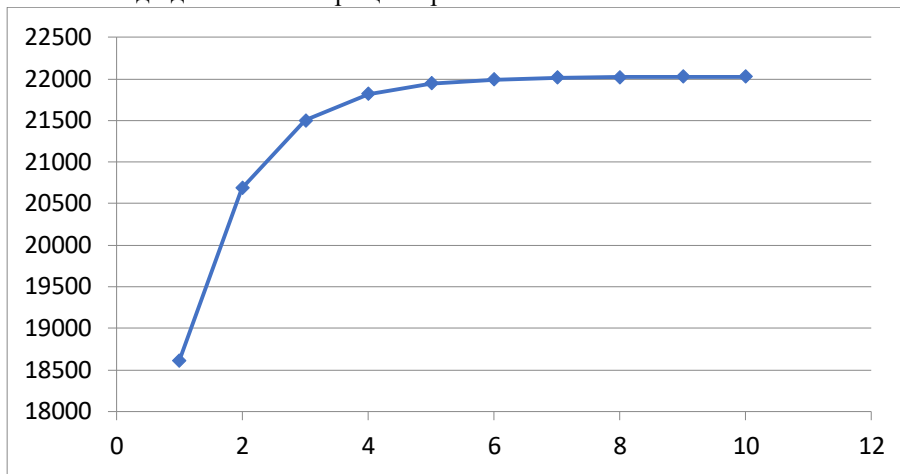


Рис.2. Графік PPS з Табл.1

Наступний приклад  $f(x) = \cos(\pi hx)$ ,  $h = 1$ . Аналогічні попередньому прикладу розрахунки наведені у таблиці, значення функції взято в точках 18, 19, ... Отримуємо очікуваний результат-ніякої збіжності немає. Зауважимо лише, що з використанням співвідношення (1) можемо швидко знаходити прогнозні значення на основі многочленів будь-яких степенів. І для цього не треба знаходити їх коефіцієнти-прогноз будеється автоматично. Єдина незначна складність-обрахунок біноміальних коефіцієнтів, але це легко можна вирішити в програмному забезпеченні через трикутник Паскаля і довгу арифметику, якщо навіть коефіцієнти виходитимуть за межі стандартних типів даних мов програмування.

Таблиця 2.

Послідовності поліноміальних прогнозів для  $f(x) = \cos(\pi hx)$ ,  $h = 1$

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	Степінь мн.
-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	1
-7	7	-7	7	-7	7	-7	7	2
-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	3
-31	31	-31	31	-31	31	-31	31	4
-63	63	-63	63	-63	63	-63	63	5
-127	127	-127	127	-127	127	-127	127	6
-255	255	-255	255	-255	255	-255	255	7
-511	511	-511	511	-511	511	-511	511	8
-1023	1023	-1023	1023	-1023	1023	-1023	1023	9
-2047	2047	-2047	2047	-2047	2047	-2047	2047	10
-4095	4095	-4095	4095	-4095	4095	-4095	4095	11
-8191	8191	-8191	8191	-8191	8191	-8191	8191	12
-16383	16383	-16383	16383	-16383	16383	-16383	16383	13
-32767	32767	-32767	32767	-32767	32767	-32767	32767	14
-65535	65535	-65535	65535	-65535	65535	-65535	65535	15
-131071	131071	-131071	131071	-131071	131071	-131071	131071	16

Зменшимо крок сітки на половину,  $h = 0.5$ . Значення функції беруться в точках 7,7.5,8,8.5,9,9.5,10,10.5 відповідно

Таблиця 3.

Послідовності поліноміальних прогнозів для  $f(x) = \cos(\pi hx)$ ,  $h = 0.5$ .

	-1	-2.7E-15	1	-7.3E-16	-1	-2.9402E-15	1	-6.10734E-14	Степінь мн.	
-1	-1	-2	1	2	-1	-2	1	2		1
-3	-3	-2	3	2	-3	-2	3	2		2
-5	-5	8.22E-15	5	1.7E-14	-5	7.13611E-15	5	1.84985E-14		3
-5	-5	4	5	-4	-5	4	5	-4		4
-1	-1	8	1	-8	-1	8	1	-8		5
7	7	8	-7	-8	7	8	-7	-8		6
15	15	1.84E-13	-15	2.11E-13	15	2.43147E-13	-15	2.1059E-13		7
15	15	-16	-15	16	15	-16	-15	16		8
-1	-1	-32	1	32	-1	-32	1	32		8
-33	-33	-32	33	32	-33	-32	33	32		10
-65	-65	9.75E-13	65	2.7E-12	-65	3.46077E-12	65	3.71381E-12		11
-65	-65	64	65	-64	-65	64	65	-64		12
-1	-1	128	1	-128	-1	128	1	-128		13
127	127	128	-127	-128	127	128	-127	-128		14
255	255	3.52E-12	-255	1.76E-11	255	4.07765E-11	-255	5.49602E-11		15

Як бачимо з таблицки, тенденції до збіжності немає, підтверджується теоретична оцінка. Графік для останнього стовпчика

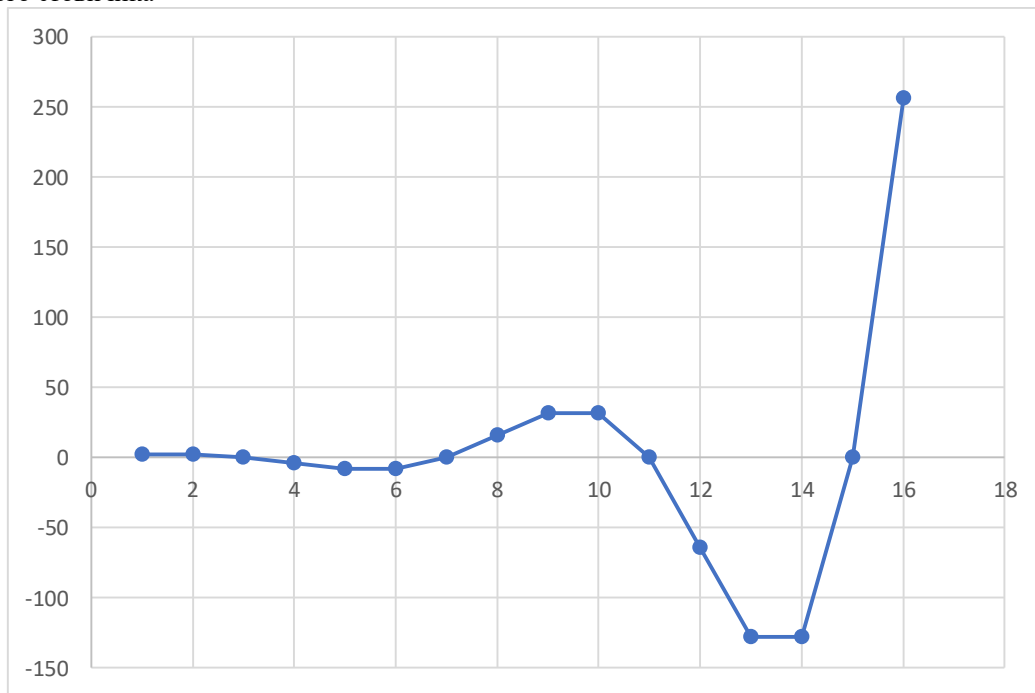


Рис.3 . Графік PPS з Таб.3

Однак виникає дуже цікава закономірність: в послідовності поліноміальних прогнозів часто отримуємо прогнозні значення, які відповідають точному. Це говорить лише про те, що оптимальний степінь многочлена можна знаходити за іншим алгоритмом в послідовності поліноміальних прогнозов. Найпростіший алгоритм тут-пошук максимальної кількості співпадінь. І дійсно, серед 15 членів PPS маємо по 4 співпадіння з точним значенням функції. При цьому пронозуються навіть значення в проміжних між цілочисельними точках, які знаходяться в околі 0.

Логіка алгоритму аналізу співпадінь може базуватись на тому факті, що кожен многочлен-це математична модель явища. Різні степені-це різні моделі. І якщо кілька істотно різних моделей дає однакові прогнози-то ймовірність достовірного результату суттєво зростає. Це закономірність, яка може бути знайдена при інтелектуальному аналізі даних.

Зменшуємо крок сітки. Нехай  $h = 1/7$ . Значення функції  $f(x) = \cos(\pi hx)$  знаходимо у точках 2.71, 2.86,3.00, 3.14, 3.29, 3.43

Таблиця 3.

Послідовності поліноміальних прогнозів для  $f(x) = \cos(\pi hx)$ ,  $h = 1/7$

-0.62349	-0.90097	-1	-0.90096887	-0.623489802	-0.222520934	Степ.мн.
-0.66756	-1.02446	-1.178447934	-1.09903113	-0.801937736	-0.346010736	1
-0.71164	-0.98039	-1.054958132	-0.9205832	-0.603875472	-0.167562802	2
-0.63222	-0.89224	-0.97554133	-0.86562507	-0.584261141	-0.187177132	3
-0.60776	-0.88351	-0.984270528	-0.89008374	-0.619604943	-0.226405793	4
-0.61865	-0.89924	-1.001728925	-0.90581321	-0.630490075	-0.230290651	5
-0.62565	-0.90408	-1.00345785	-0.90408428	-0.625645736	-0.223290378	6
-0.62488	-0.90193	-1.000342435	-0.90062643	-0.622530321	-0.221134444	7
-0.62334	-0.90054	-0.999382954	-0.900284	-0.622872756	-0.222093925	8
-0.62319	-0.90069	-0.999809963	-0.90090104	-0.623557625	-0.222710971	9
-0.62346	-0.901	-1.000084574	-0.90109108	-0.623625449	-0.222643148	10
-0.62354	-0.90103	-1.00005439	-0.90100651	-0.623503235	-0.222507501	11
-0.62351	-0.90097	-0.999994022	-0.90095212	-0.623465596	-0.222494067	12
-0.62348	-0.90096	-0.999988043	-0.9009581	-0.623482347	-0.222518273	13
-0.62349	-0.90097	-0.999998816	-0.90097005	-0.62349312	-0.222525728	14
-0.62349	-0.90097	-1.000002134	-0.90097124	-0.623491936	-0.22252241	15
-0.62349	-0.90097	-1.000000657	-0.9009691	-0.623489567	-0.222520277	16

Отримуємо збіжність. Графік для останнього стовпчика на Рис.4

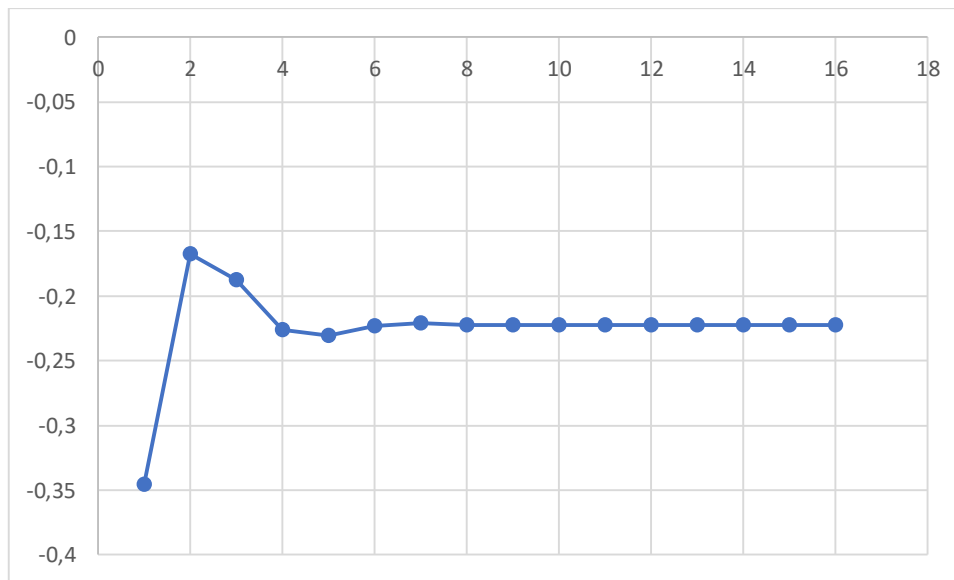


Рис.4. Графік PPS з Таб. 4

### ВИСНОВКИ З ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК

В статті доведено умови збіжності послідовності поліноміальних прогнозів (PPS) до невідомого прогнозного значення довільної функції. Оскільки тут мова йде про збіжність в класичному розумінні, то вважається, що функція задана у зліченній кількості точок на рівномірній сітці. Однак, на практиці, коли мова йде про експериментальні дані, виникають скінченні часові ряди, причому навіть часто досить невеликі. А тому в роботі наведено аналоги визначення збіжності для скінченних часових рядів і відповідно, метод прогнозування, суть якого полягає у інтелектуальному аналізі послідовності поліноміальних прогнозів.

В контексті збіжності послідовності поліноміальних прогнозів введено поняття біноміально-стабільних функцій, умовно біноміально стабільних функцій та біноміально-стабільних даних. В роботі обгрунтовано непорожність відповідних класів функцій та наведено приклади представників класів. Дослідження умовно біноміально-стабільних функцій показало, що збіжність послідовності PPS залежить від величини кроку сітки. Отримані умови для кроку сітки, при яких має місце збіжність для окремих функцій-представників класів.

Чисельні результати підтвердили відповідні теоретичні та дали можливість оцінити чисельно швидкість збіжності PPS до прогнозних значень. Зокрема, для тестового прикладу експоненційної функції відносна похибка прогнозування становила 0.0035% лише для 10 членів послідовності поліноміальних прогнозів.

В процесі аналізу умовно біноміально-стабільних функцій було виявлено цікаві закономірності в PPS та запропоновано алгоритм пошуку співпадінь у множині PPS, який показав ефективність навіть на 15 членах PPS.

Усі отримані результати на тестових прикладах продемонстрували ефективність та перспективність подальших досліджень методів інтелектуального аналізу даних, що використовують послідовності поліноміальних прогнозів.

### References

1. Bakas N. P. Numerical solution for the extrapolation problem of analytic functions research. *AAAS Research*, 3, 2019. 1–27.
2. Brezinski C., Redivo-Zaglia M. *Extrapolation and rational approximation: The works of the main contributors*. Springer, 2020. 406 p.
3. Demiris N., Lunn D., Sharples L. D. Survival extrapolation using the polyweibull model. *Statistical Methods in Medical Research*, 24(2), 2011. 287–301.
4. Guliyev V. S., Ghorbanalizadeh A., Sawano Y. Approximation by trigonometric polynomials in variable exponent Morrey spaces. *Analysis and Mathematical Physics*, 9(3), 2018. 1265–1285.
5. Hyndman R. J., Kostenko A. V. Minimum sample size requirements for seasonal forecasting model. *Foresight*, 7, 2007. 175–184.
6. Israfilov D. M., Testici A. Some inverse and simultaneous approximation theorems in weighted variable exponent Lebesgue spaces. *Analysis Mathematica*, 44(4), 2018. 475–492.
7. Kostinsky A. S. On the principles of a spline extrapolation concerning geophysical data. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2, 2014. 111–117.
8. Makridakis S., Bakas N. Forecasting and uncertainty: A survey. *Risk and Decision Analysis*, 6(1), 2016. 37–64.
9. Monroe J. I., Hatch H. W., Mahynski N. A., Shell M. S. Extrapolation and interpolation strategies for efficiently estimating structural observables as a function of temperature and density. *The Journal of Chemical Physics*, 153(14), 2020.
10. Turbal Y., Bomba A., Alkaleg Hsen Drivi A. Some aspects of extrapolation based on interpolation polynomials. *Physico-Mathematical Modelling and Informational Technologies*, 33, 2021. 175–180.
11. Turbal Y., Bomba A., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O. Pyramidal method of extrapolation for short time series. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 10(6), 2019. 525.
12. Turbal Y., Shlikhta G., Turbal M., Turbal B. The polynomial forecasts improvement based on the algorithm of optimal polynomial degree selecting. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(125(5)), 2023. 34–42.
13. Wang J., Chen H., Li Y., Wu Y., Zhang Y. A review of the extrapolation method in load spectrum compiling. *Journal of Mechanical Engineering*, 62(1), 2016. 60–75.
14. Wang L. Y., Lee W. C. One-step extrapolation of the prediction performance of a gene signature derived from a small study. *BMJ Open*, 5(4), 2015. e007170.
15. Zhan Z., Fu Y., Yang R. J., Xi Z., Shi L. A Bayesian inference based model interpolation and extrapolation. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*, 5(2), 2012. 357–364.
16. Zhao S., Yang K., Xintie X. Reconstruction from truncated projections using mixed extrapolations of exponential and quadratic functions. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 19(2), 2011. 155–172.
17. Klyushin D. A., Lyashko S. I., Lyashko N. I., Bondar O. S., Tymoshenko A. A. Generalized optimization of processes of drug transport in tumors. *Cybernetics and Systems Analysis*, 56(5), 2020. 758–765.
18. Lyashko S. I., Nomirovskii D. A. Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid. *Differential Equations*, 39(1), 2003. 90–98.