

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-83-64>

УДК 004.8:004.94:007.52:629.7.05

ТАНАСІЙЧУК Степан

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0002-2657-6190>

e-mail: tanasi@i.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

У статті вирішується актуальна науково-прикладна задача підвищення точності та робастності систем автономного донаведення безпілотних літальних апаратів (БПЛА) в умовах дії нестационарних зовнішніх збурень та обмежених ресурсів бортових обчислювачів. Авторами проведено ґрунтовний аналіз сучасної науково-технічної суперечності між необхідністю реалізації складних інтелектуальних алгоритмів керування та жорсткими SWaP-обмеженнями вбудованих систем реального часу, де надмірна обчислювальна складність призводить до критичних часових затримок і втрати стійкості. Наукова новизна дослідження полягає у розробці уточненої математичної моделі динаміки чотирьохроторного БПЛА, яка вперше враховує векторну конфігурацію додаткових горизонтальних підруючих пристроїв (ГПП). Така конструктивна схема з надлишковою актуацією дозволяє реалізувати незалежне керування лінійним положенням апарата без зміни його кутової орієнтації, що є визначальним для етапу прецизійного маневрування. Вперше математично обґрунтовано та реалізовано повну алгоритмічну декупеляцію каналів позиціонування та орієнтації, що створює умови для паралельного виконання обчислювальних потоків на сучасних багатоядерних системах на кристалі. Особливу увагу приділено обчислювальній ефективності: доведено, що використання повнорангової матриці актуації гарантує єдиний аналітичний розв'язок задачі розподілу керуючих зусиль зі сталою складністю $O(1)$, виключаючи ітераційні методи та непередбачувані затримки. Обґрунтовано вибір кутів Ейлера для опису орієнтації в межах малих кутів нахилу, що знижує навантаження на процесор та забезпечує високу лінгвістичну інтерпретованість для інтелектуальних алгоритмів. Практична значущість роботи підтверджується впровадженням нейромережі RSEFNN для онлайн-ідентифікації нелінійних сил та зовнішніх збурень, що дозволяє замінити громіздкі аналітичні вирази коріолісових сил та аеродинамічного опору єдиним адаптивним блоком. Запропонований підхід радикально спрощує архітектуру польотного програмного забезпечення, підвищує його робастність до параметричних невизначеностей та мінімізує обсяг необхідної програмної пам'яті. Сформована інтелектуально-робастна архітектура забезпечує прецизійне донаведення БПЛА без ризику виникнення обчислювальних сингулярностей, зберігаючи високу швидкодію цифрового двійника в системах жорсткого реального часу.

Ключові слова: автономний безпілотний літальний апарат, надлишкова актуація, горизонтальні підруючі пристрої, математична модель динаміки, прецизійне донаведення, алгоритмічна декупеляція, система керування реального часу, вбудовані системи, SWaP-обмеження, цифровий двійник, нейромережа RSEFNN, онлайн-ідентифікація збурень, робастність, матриця актуації, кути Ейлера, обчислювальна складність, розподіл керування, детермінованість обчислень, стабілізація орієнтації, кіберфізична система.

TANASIICHUK Stepan

Khmelnytskyi National University

MATHEMATICAL MODEL OF UNMANNED AERIAL VEHICLES' DYNAMICS

The article solves the current scientific and applied problem of increasing the accuracy and robustness of autonomous guidance systems of unmanned aerial vehicles (UAVs) under the influence of non-stationary external disturbances and limited resources of on-board computers. The authors have conducted a thorough analysis of the modern scientific and technical contradiction between the need to implement complex intelligent control algorithms and strict SWaP constraints of embedded real-time systems, where excessive computational complexity leads to critical time delays and loss of stability. The scientific novelty of the study lies in the development of a refined mathematical model of the dynamics of a four-rotor UAV, which for the first time takes into account the vector configuration of additional horizontal thrusters (HST). Such a constructive scheme with redundant actuation allows for independent control of the linear position of the device without changing its angular orientation, which is crucial for the precision maneuvering stage. For the first time, a complete algorithmic decoupling of positioning and orientation channels has been mathematically substantiated and implemented, which creates conditions for parallel execution of computational flows on modern multi-core systems on a crystal. Particular attention is paid to computational efficiency: it has been proven that the use of a full-rank actuation matrix guarantees a single analytical solution to the control effort distribution problem with constant complexity $O(1)$, excluding iterative methods and unpredictable delays. The choice of Euler angles for describing orientation within small tilt angles has been justified, which reduces the load on the processor and provides high linguistic interpretability for intelligent algorithms. The practical significance of the work is confirmed by the implementation of the RSEFNN neural network for online identification of nonlinear forces and external disturbances, which allows replacing cumbersome analytical expressions of Coriolis forces and aerodynamic drag with a single adaptive block. The proposed approach radically simplifies the architecture of the flight software, increases its robustness to parametric uncertainties and minimizes the amount of required program memory. The formed intelligent-robust architecture provides precision UAV guidance without the risk of computational singularities, while maintaining the high performance of the digital twin in hard real-time systems.

Keywords: autonomous unmanned aerial vehicle, redundant actuation, horizontal thrusters, mathematical model of dynamics, precision homing, algorithmic decoupling, real-time control system, embedded systems, SWaP constraints, digital twin, RSEFNN neural network, online disturbance identification, robustness, actuation matrix, Euler angles, computational complexity, control distribution, computational determinism, orientation stabilization, cyber-physical system.

Стаття надійшла до редакції / Received 24.07.2025

Прийнята до друку / Accepted 24.08.2025

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

На сьогодні безпілотні літальні апарати (БПЛА) набувають все більшого використання в різних галузях народного господарства та оборонної сфери, виконуючи критичні завдання моніторингу, прецизійного позиціонування та автономної доставки вантажів. Сучасний автономний БПЛА є складною кіберфізичною системою, де алгоритмічна складність безпосередньо обмежена ресурсами бортових обчислювачів, у якій обчислювальні алгоритми, мережеві комунікації та фізичні аеромеханічні процеси інтегровані у єдиний зациклений контур функціонування в реальному часі [1].

Сучасні системи керування безпілотними літальними апаратами (БПЛА) являють собою критично важливі вбудовані обчислювальні системи реального часу, у яких алгоритмічна складність безпосередньо трансформується у часові затримки, фазові зсуви та втрату робастності замкненого контуру керування [2, 3]. На відміну від класичних автоматизованих систем, БПЛА функціонують в умовах одночасної дії нелінійних аеродинамічних ефектів, стохастичних збурень і жорстких обмежень на масо-габаритні та енергетичні характеристики бортової апаратури (SWaP-обмеження) [4-6]. Це зумовлює необхідність спільного аналізу архітектури апаратного забезпечення, алгоритмів керування та програмної інфраструктури. Підвищення вимог до точності маневрування БПЛА в умовах дії нестационарних зовнішніх збурень та динамічних невизначеностей вимагає розробки нових обчислювально ефективних методів автоматичного керування.

Традиційні робастні методи керування (зокрема, теорія ковзних режимів) демонструють високу стійкість, проте їхня практична реалізація у цифрових системах супроводжується ефектом «деренчання», що генерує високочастотний шум у каналах актуації та перевантажує системну шину даних. Водночас сучасні підходи на основі глибокого навчання мають надмірну обчислювальну складність для систем жорсткого реального часу [7, 8].

Проведений аналіз сучасного стану методів і засобів керування автономними безпілотними літальними апаратами показав, що існуючі підходи не забезпечують одночасного виконання вимог прецизійності навігаційного керування, робастності до зовнішніх збурень і детермінованості обчислювального циклу в умовах обмежених ресурсів бортових обчислювальних систем. Зокрема, класичні лінійні регулятори характеризуються недостатньою інваріантністю до параметричних і структурних невизначеностей, тоді як сучасні адаптивні та інтелектуальні методи часто супроводжуються зростанням обчислювальної складності, латентності та непередбачуваності часу виконання [9-12].

Особливо критичними зазначені обмеження є на етапі прецизійного донаведення БПЛА, де система керування повинна функціонувати в умовах зашумлених та частково неповних навігаційних даних, нестационарних аеродинамічних збурень і змінної динаміки апарата, зберігаючи при цьому гарантовану стійкість та необхідну точність позиціонування. Аналіз архітектур мультисенсорного злиття даних і навігаційних алгоритмів також засвідчив, що затримки, пов'язані з обробкою інформації та синхронізацією різнорідних сенсорних потоків, істотно впливають на якість керування та можуть призводити до деградації робастних властивостей замкненої системи [13-15].

Таким чином, виникає науково-технічна суперечність між необхідністю підвищення точності та стійкості навігаційного керування автономного БПЛА і обмеженнями, накладеними на обчислювальні ресурси та часові характеристики бортових систем керування. Усунення цієї суперечності потребує розробки інтегрованого підходу, який поєднує робастні методи керування з інтелектуальними механізмами компенсації невизначеностей і адаптивного злиття навігаційної інформації без суттєвого зростання алгоритмічної складності.

У зв'язку з цим метою дослідження є підвищення точності та робастності системи донаведення автономного безпілотного літального апарата шляхом розробки інтелектуально-робастної архітектури керування, здатної забезпечувати стабільну роботу в умовах зовнішніх збурень, латентності навігаційних алгоритмів і обмежених обчислювальних ресурсів. Отже, розробка нових моделей та методів адаптивного керування на основі самоеволюціонуючих обчислювальних структур, здатних до онлайн-ідентифікації збурень при мінімальних витратах ресурсів, є актуальною науково-прикладною задачею.

Математична модель динаміки безпілотних літальних апаратів

Для розробки адаптивної системи донаведення необхідно сформувати прецизійну математичну модель, яка описує нелінійну динаміку чотирироторного БПЛА, доповненого двома горизонтальними підрулюючими пристроями (ГПП). На відміну від класичних квадрокоптерів, така конфігурація характеризується надлишковою актуацією, що дозволяє реалізувати незалежне керування положенням апарата без зміни його кутової орієнтації.

Математичний опис просторового руху автономного БПЛА базується на встановленні зв'язку між векторами сил і моментів, що діють у зв'язаній системі координат, та результируючим переміщенням апарата в інерційному просторі. Для опису динаміки БПЛА з надлишковою актуацією (наявністю ГПП) у даній роботі використовується декомпозиція руху на основі двох правобічних ортогональних систем координат.

1. Інерціальна (земна) система координат $E(O_e, X_e, Y_e, Z_e)$ – нерухома система, пов'язана з певною точкою на поверхні Землі. Вісь O_e, Z_e спрямована вертикально вгору, протилежно вектору сили тяжіння. Осі O_e, X_e та O_e, Y_e лежать у горизонтальній площині. Ця система є базовою для завдань глобальної навігації, планування траєкторій та визначення похибок позиціонування на етапі донаведення.

2. Зв'язана (рухома) система координат $B(O_b, X_b, Y_b, Z_b)$ – система, початок якої O_b жорстко суміщений із центром мас БПЛА. Вісь O_b, X_b спрямована вздовж поздовжньої осі рами (спрямована «вперед»), вісь O_b, Y_b спрямована праворуч, а вісь O_b, Z_b перпендикулярна площині рами і спрямована «вгору» відносно конструкції апарата. Всі керуючі сили, що генеруються основними роторами та ГПП, розраховуються саме у цій системі (рис. 1).

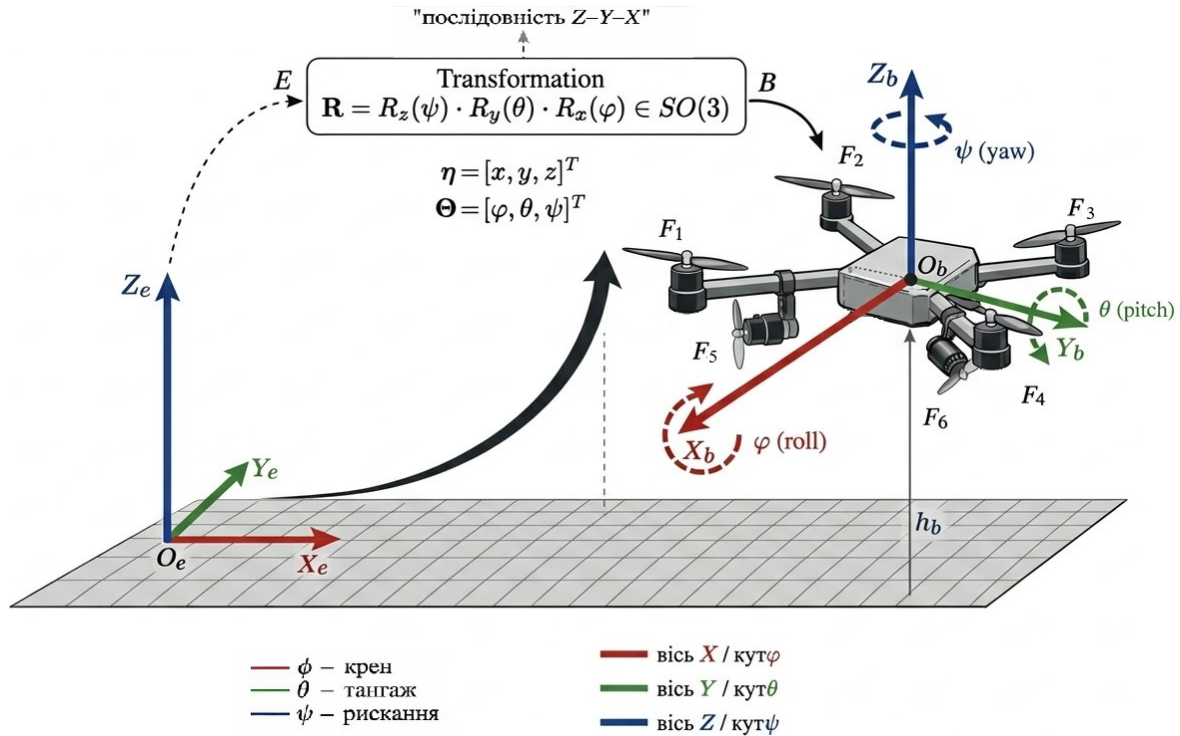


Рис. 1. Системи координат та кути орієнтації БПЛА в тривимірному просторі

Повне положення БПЛА у просторі визначається вектором стану ξ , який об'єднує координати центру мас та кути кутової орієнтації:

$$\xi = \begin{bmatrix} \eta \\ \Theta \end{bmatrix} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T, \quad (1)$$

де $\eta = [x, y, z]^T$ – радіус-вектор лінійного положення у земній системі координат; $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$ – вектор кутів Ейлера, де ϕ – кут крену, θ – кут тангажу, ψ – кут ристання.

Для перетворення векторів із зв'язаної системи координат в інерціальну використовується матриця повороту $R \in SO(3)$. Згідно з прийнятою в авіації послідовністю поворотів (Z-Y-X), повна матриця R є результатом послідовного перемноження трьох елементарних матриць повороту навколо кожної з осей.

Матриця повороту навколо осі O_b, X_b (кут крену ϕ):

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Матриця повороту навколо осі O_b, Y_b (кут тангажу θ):

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матриця повороту навколо осі O_b, Z_b (кут ристання ψ):

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Узагальнена матриця повороту $R(\Theta) = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi)$ після алгебраїчних перетворень набуває вигляду:

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де $c_\alpha = \cos \alpha$ та $s_\alpha = \sin \alpha$.

Важливою властивістю матриці повороту $R(\Theta)$, як елемента спеціальної ортогональної групи $SO(3)$, є її ортогональність. Це означає, що зворотна матриця дорівнює транспонованій:

$$R^{-1}(\Theta) = R^T(\Theta). \quad (6)$$

Ця властивість критично важлива для оптимізації обчислювальних алгоритмів бортового комп'ютера, оскільки дозволяє замінити операцію обернення матриці (яка є ресурсомісткою) на просте транспонування, що суттєво знижує латентність контуру керування.

Окрім лінійного переміщення, необхідно встановити математичний зв'язок між вектором кутових швидкостей у зв'язаній системі координат $\Omega = [p, q, r]^T$ (які вимірюються бортовим гіроскопом) та швидкістю зміни кутів Ейлера $\dot{\Theta} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$. Цей зв'язок задається матрицею кутових перетворень $W(\Theta)$:

$$\dot{\Theta} = W(\Theta) \cdot \Omega. \quad (7)$$

Матриця $W(\Theta)$ будується на основі проекцій кутових швидкостей на відповідні осі обертання і має наступний вигляд:

$$W(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де $t_\alpha = \tan \alpha$.

Аналіз структури матриці $W(\Theta)$ виявляє наявність знаменника $\cos \theta$ у третьому рядку. Це вказує на обчислювальну особливість: при наближенні кута тангажу до $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$ елементи матриці прямують до нескінченності. Ця математична сингулярність при куті тангажу $\theta = \pm 90^\circ$ (ефект «Gimbal Lock»), призводить до невизначеності кутів крену та ризику. Проте, запропонована у даній роботі архітектура БПЛА з ГПП дозволяє здійснювати прецизійне донаведення при малих кутах нахилу корпусу, що фактично виключає ризик наближення до сингулярності та підвищує числову стабільність навігаційних обчислень.

Існує два математичних апарати для опису орієнтації – кути Ейлера або кватерніони. У даній роботі обрано представлення через кути Ейлера, незважаючи на проблему «Gimbal Lock» (замка осей), з наступних причин:

1. Інтерпретованість для нечіткої логіки: База правил запропонованої нейромережі RSEFNN будується на лінгвістичних термах (наприклад, «великий кут нахилу»), що безпосередньо відповідає кутам Ейлера і є складним для реалізації через кватерніони.
2. Обмеженість режимів польоту: Специфіка етапу донаведення БПЛА з ГПП передбачає маневрування при відносно малих кутах нахилу ($\theta < 30^\circ$), що дозволяє системі працювати в зоні стабільності матриці $W(\Theta)$ без ризику виникнення обчислювальних сингулярностей.
3. Зниження навантаження на CPU: Використання кутів Ейлера дозволяє уникнути необхідності постійної нормалізації кватерніонів, що економить такти процесора при реалізації на мікроконтролерах із низькою потужністю.

Для розв'язання задачі керування необхідно пов'язати швидкість зміни координат БПЛА в інерційному просторі з векторами швидкостей, що розраховуються безпосередньо бортовим комп'ютером на основі даних від сенсорів.

Нехай $V_b = [u, v, w]^T$ – вектор лінійної швидкості центру мас апарата, компоненти якого визначені вздовж осей зв'язаної системи координат B . Оскільки бортові інерціальні сенсори (акселерометри) вимірюють прискорення і, як наслідок, швидкість саме у рухомій системі координат апарата, виникає обчислювальна задача проектування цих значень на нерухомі осі земної системи E .

Математично цей процес описується операцією лінійного перетворення вектора через оператор повороту. Оскільки матриця $R(\Theta)$ за своєю побудовою є ортогональною матрицею переходу, вона виконує функцію відображення компонентів швидкості з рухомої бази у нерухому.

Швидкість зміни глобальних координат $\dot{\eta} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ є похідною від вектора положення за часом відносно інерціальної системи. Таким чином, фундаментальне кінематичне рівняння, що описує переміщення центру мас БПЛА, отримується шляхом множення матриці повороту на вектор швидкості у зв'язаній системі:

$$\dot{\eta} = R(\Theta) \cdot V_b, \quad (9)$$

Або у розгорнутому матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де r_{ij} – відповідні компоненти узагальненої матриці повороту $R(\Theta)$, обчислені через кути Ейлера.

З позицій комп'ютерної інженерії, це рівняння є основою алгоритму інтегрування траєкторії: на кожному такті обчислень (step-time) програма отримує нові значення V_b , трансформує їх через поточну орієнтацію Θ та оновлює глобальні координати апарата.

Таким чином, повна кінематична модель БПЛА представляється системою двох матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = R(\Theta) \cdot V_b \\ \dot{\Theta} = W(\Theta) \cdot \Omega \end{cases} \quad (11)$$

Ця система рівнянь є базою для побудови цифрового двійника БПЛА у середовищі моделювання та використовується в алгоритмі прогнозування стану в межах нейромережевого контролера.

Динамічна модель БПЛА описує взаємозв'язок між зовнішніми силами, моментами та зміною стану апарата у часі. Враховуючи конструктивні особливості досліджуваного об'єкта – наявність основних підйомних роторів та додаткових горизонтальних підрулюючих пристроїв (ГПП), – рівняння динаміки базуються на законах Ньютона-Ейлера для твердого тіла з шістьма ступенями свободи.

Згідно з другим законом Ньютона, зміна лінійного імпульсу апарата в інерційній системі координат визначається сумою всіх діючих сил:

$$m\ddot{\eta} = F_G + R(\Theta)F_B + F_D, \quad (12)$$

де m – повна маса БПЛА; $\ddot{\eta} = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}]^T$ – вектор лінійних прискорень в інерційній системі; $F_G = [0, 0, -mg]^T$ – вектор сили тяжіння; $R(\Theta)$ – матриця повороту (5); $F_B = [F_x, F_y, F_z]^T$ – вектор керуючих сил, що генеруються актуаторами у зв'язаній системі координат B ; F_D – вектор невідомих зовнішніх збурень (вітру) та немодельованих аеродинамічних ефектів.

На відміну від стандартних квадрокоптерів, де $F_x = F_y = 0$, у запропонованій моделі компоненти F_x та F_y є ненульовими завдяки тязі ГПП, що дозволяє керувати прискоренням у горизонтальній площині без нахилу корпусу апарата.

Рівняння зміни моменту імпульсу відносно центру мас у зв'язаній системі координат описується рівняннями Ейлера:

$$I\dot{\Omega} + \Omega \times (I\Omega) = \Gamma_B + \Gamma_D, \quad (13)$$

де $I = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$ – тензор інерції БПЛА (вважається діагональним завдяки симетрії конструкції); $\dot{\Omega} = [\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T$ – вектор кутових прискорень; $\Omega \times (I\Omega)$ – гіроскопічний момент, що описує перехресні зв'язки між осями обертання; $\Gamma_B = [M_\phi, M_\theta, M_\psi]^T$ – вектор керуючих моментів; Γ_D – вектор зовнішніх обертальних збурень.

Об'єднуючи кінематичні та динамічні рівняння, представимо повну математичну модель БПЛА у компактному матричному вигляді, зручному для програмної реалізації та синтезу адаптивного керування:

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = \frac{1}{m}(R(\Theta)F_B + F_G + F_D) \\ \dot{\Omega} = I^{-1}(\Gamma_B - \Omega \times (I\Omega) + \Gamma_D) \end{cases} \quad (14)$$

З позицій комп'ютерної інженерії, дана система рівнянь є основою обчислювального ядра цифрового двійника. Процес перетворення вхідних сигналів актуаторів у вихідний вектор стану апарата через послідовні обчислювальні блоки представлено на рис. **Помилка! Джерело посилання не знайдено..**

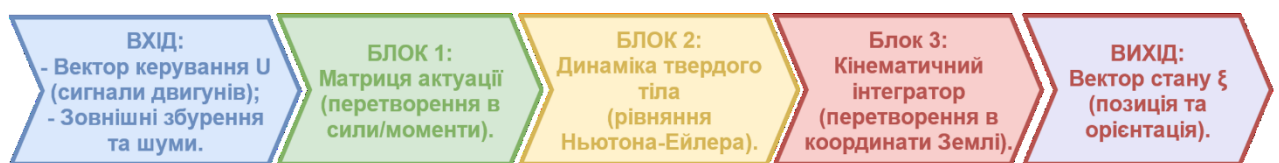


Рис. 2. Структурна схема математичної моделі як об'єкта обчислень (Digital Twin)

При розробці програмного забезпечення для моделювання ці диференціальні рівняння розв'язуються чисельними методами (наприклад, метод Рунге-Кутти 4-го порядку).

Основними обчислювальними викликами при реалізації даної моделі в реальному часі є:

1. Висока нелінійність: Наявність тригонометричних функцій у матриці $R(\Theta)$ та векторного добутку $\Omega \times (I\Omega)$ потребує значної кількості операцій множення.

2. Перехресні зв'язки: Зміна одного параметра (наприклад, кута ϕ) миттєво впливає на всі лінійні прискорення, що вимагає від алгоритму керування високої швидкодії для компенсації цих ефектів.

3. Невизначеність збурень: Оскільки F_D та Γ_D не можуть бути точно виміряні прямими методами, виникає потреба в інтелектуальному оцінювачі (нейромережі RSEFNN), яка в реальному часі буде обчислювати ці заважаючі впливи.

Запропонована модель з ГПП дозволяє спростити задачу стабілізації на етапі донаведення, оскільки при малих кутах нахилу ($\phi, \theta \approx 0$) матриця $R(\Theta)$ наближається до одиничної, а керування горизонтальним положенням здійснюється лінійно через вектори тяги ГПП.

Для цілей синтезу адаптивного керування та програмної реалізації алгоритмів у реальному часі, систему диференціальних рівнянь (14) доцільно представити у загальній векторно-матричній формі, прийнятій у теорії робототехнічних систем:

$$M(\xi)\ddot{\xi} + C(\xi, \dot{\xi})\dot{\xi} + G(\xi) + D(\dot{\xi}) = \tau + \tau_d, \quad (15)$$

де $M(\xi) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матриця інерції та мас – вона є додатно визначеною та симетричною, для БПЛА з ГПП її структура враховує не лише масу корпусу, а й розподіл інерційних моментів додаткових двигунів; $C(\xi, \dot{\xi}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – матриця коріолісових та центробіжних сил – ці сили описують динамічні зв'язки між різними ступенями свободи, які виникають при швидкому маневруванні (наприклад, вплив швидкості ристання на крен); $G(\xi) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ – вектор гравітаційних сил; $D(\dot{\xi}) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ – вектор аеродинамічного опору – оскільки етап донаведення відбувається в умовах вітру, цей член описується як сума лінійного та квадратичного опору повітря: $d_{linear}\dot{\xi} + d_{quad}\dot{\xi}^2$; $\tau \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ – вектор узагальнених керуючих сил та моментів (двигуни генерують тягу, яка потім через матрицю B перетворюється на вектор τ); τ_d – вектор невідомих зовнішніх збурень, який включає в себе турбулентність та похибки апроксимації моделі.

З позицій комп'ютерної інженерії, точне аналітичне обчислення компонентів матриць $C(\xi, \dot{\xi})$ та $D(\dot{\xi})$ у бортовому контролері є практично неможливим через:

1. Динамічну мінливість: Коефіцієнти аеродинамічного опору змінюються залежно від щільності повітря та конфігурації вантажу.
2. Обчислювальний overхед: Обчислення повних виразів коріолісових сил потребує сотень операцій множення на кожному такті, що суттєво підвищує латентність системи.

Це створює наукове підґрунтя для використання запропонованої нейромережі RSEFNN. Замість того, щоб програмувати складні аналітичні вирази для кожної складової моделі, обчислювальна система БПЛА буде використовувати нейромережу для онлайн-ідентифікації сукупного ефекту нелінійних сил C, G, D та збурень τ_d .

Такий підхід дозволяє радикально спростити архітектуру польотного ПЗ, замінивши десятки жорстко заданих рівнянь одним адаптивним обчислювальним блоком, що самостійно підлаштовується під фізику польоту.

Вектор узагальнених сил та моментів τ , що фігурує у динамічній моделі (15), є набором віртуальних керуючих сигналів. Для практичної реалізації польоту в межах обчислювальної системи БПЛА необхідно розв'язати задачу розподілу керування (Control Allocation) – декомпозицію віртуальних зусиль на реальні команди для кожного з шести актуаторів.

Нехай $U = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_{u5}, F_{u6}]^T$ – вектор тяги актуаторів, де F_1, F_2, F_3, F_4 – основні підйомні ротори, а F_{u5}, F_{u6} – горизонтальні підрулюючі пристрої. Зв'язок між віртуальним керуванням τ та вектором тяги U задається через лінійну матрицю актуації B :

$$\tau = B \cdot U. \quad (16)$$

Матриця B формується на основі геометричних параметрів рами. Основні ротори розташовані за схемою «X-quad» із плечем рами l . ГПП встановлені в центрі мас апарата і розгорнуті під кутом $\alpha = 45^\circ$ відносно поздовжньої осі X_b (рис. **Помилка! Джерело посилання не знайдено.**).

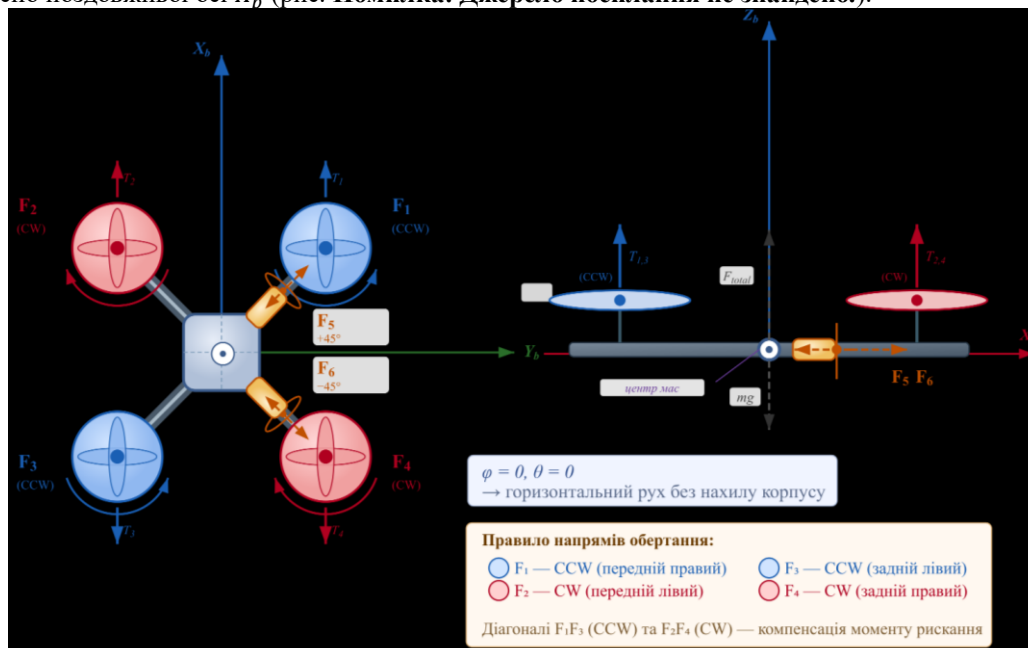


Рис. 3. Конструктивна схема розміщення актуаторів БПЛА та проєкції векторів тяги ГПП, вид зверху площина XOY та вид збоку площина XOZ

Враховуючи проекції векторів тяги, компоненти вектора віртуального керування $\tau = [F_x, F_y, F_z, M_\phi, M_\theta, M_\psi]^T$ розраховуються за наступними залежностями:

1. Сили у горизонтальній площині (використання ГПП):

$$F_x = (F_{u5} - F_{u6}) \cos \alpha$$

$$F_y = (F_{u5} + F_{u6}) \sin \alpha$$

Така конфігурація дозволяє створювати вектор сили у будь-якому напрямку горизонтальної площини шляхом диференційного керування тягою двох ГПП.

2. Вертикальна тяга та керуючі моменти (основні ротори):

$$F_z = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$M_\phi = L(F_1 - F_2 - F_3 + F_4)$$

$$M_\theta = L(F_1 + F_2 - F_3 - F_4)$$

$$M_\psi = c(F_1 - F_2 + F_3 - F_4)$$

де $L = l \sin 45^\circ = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ – проекція плеча рами на осі, c – коефіцієнт реактивного моменту гвинта.

Повна матриця актуації $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ набуває вигляду:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ L-L-L & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & L & -L-L & 0 & 0 & 0 \\ c-c & c & -c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

З позицій комп'ютерної інженерії, ключовою вимогою до алгоритму є мінімізація часових витрат процесора. Оскільки матриця B залежить лише від незмінних конструктивних параметрів БПЛА, задача обчислення тяги двигунів зводиться до прямого множення на обернену матрицю B^{-1} , яка розраховується аналітично на етапі проектування ПЗ:

$$U = B^{-1} \cdot \tau. \quad (18)$$

Алгоритм актуації, що реалізується у бортовому контролері, містить наступні етапи обробки даних:

1. Матричне перетворення (18): Обчислення теоретично необхідної тяги F_i для кожного двигуна.

2. Обробка обмежень (Saturation Logic): Враховуючи фізичні ліміти двигунів, програмний модуль здійснює «відсікання» значень за правилом:

$$F_{i,limited} = clamp(F_i, F_{min}, F_{max}).$$

3. Апроксимація характеристики двигуна: Оскільки ESC-контролери керуються сигналами ШІМ (PWM), здійснюється перетворення розрахованої сили тяги у тривалість імпульсу. Для цього використовується квадратична апроксимація або Look-up таблиця:

$$PWM_i = a\sqrt{F_{i,limited}} + b,$$

де a, b – коефіцієнти, отримані під час стендових випробувань двигунів.

Використання прямого матричного методу (18) забезпечує складність обчислень $O(1)$ та гарантує детермінованість часу виконання такту керування.

Структурним результатом розробленої моделі та повноранговості матриці B є можливість повного алгоритмічного розділення ступенів свободи БПЛА. Концептуальна схема такої декупеляції, що дозволяє паралельно обчислювати команди для стабілізації орієнтації та горизонтального позиціонування, представлена на рис. **Помилка! Джерело посилання не знайдено..**



Рис. 4. Концептуальна схема декупеляції (розв'язки) каналів керування

Така архітектурна розв'язка є фундаментальною передумовою для синтезу двоконтурного гібридного контролера.

Розроблена математична модель БПЛА з надлишковою актуацією володіє набором специфічних властивостей, які є визначальними для побудови високоефективного вбудованого програмного забезпечення керування. Проведений аналіз дозволяє виділити наступні ключові аспекти:

1. Повноранговість та детермінованість актуації. Матриця актуації B (17) є квадратною та має повний ранг ($\text{rank}(B) = 6$). З позицій обчислювальної математики це означає, що задача розподілу керуючих зусиль має єдиний аналітичний розв'язок. Це дозволяє уникнути ітераційних методів оптимізації (як у випадку систем із недостатньою актуацією), що гарантує сталу обчислювальну складність $O(1)$ та відсутність непередбачуваних затримок у циклі стабілізації.

2. Алгоритмічна декупеляція ступенів свободи. Завдяки конструктивному використанню ГПП, модель дозволяє здійснити повну розв'язку між каналами горизонтального переміщення (x, y) та кутами нахилу корпусу (ϕ, θ). Це дозволяє розпаралелити обчислювальні процеси у бортовому комп'ютері:

- потік стабілізації орієнтації може виконуватися на рівні мікроконтролера (MCU) з надвисокою частотою;

- потік точного позиціонування може бути реалізований як окремий програмний модуль, що значно спрощує архітектуру ПЗ та полегшує його налагодження.

Математично доведена декупеляція каналів дозволяє реалізувати архітектуру програмного забезпечення, у якій обчислювальні потоки (threads) стабілізації орієнтації та горизонтального позиціонування виконуються паралельно на багатоядерних системах на кристалі (SoC). Це дозволяє мінімізувати критичні часові затримки в контурі керування, що, на відміну від існуючих каскадних схем, забезпечує прецизійну точність маневрування апарата без зміни його кутового стану.

3. Придатність до нейромережевої апроксимації. Аналіз динамічного рівняння (15) показує, що найбільш ресурсомісткі складові (матриця Коріоліса C та вектор опору D) є гладкими нелінійними функціями. Це обґрунтовує можливість їх заміни єдиним інтелектуальним обчислювальним блоком – нейромережею RSEFNN. Для вбудованої системи це означає заміну сотень рядків коду з тригонометричними перетвореннями на компактний алгоритм обчислення нейронної мережі, що суттєво знижує вимоги до обсягу програмної пам'яті (Flash).

4. Чисельна стабільність та відсутність сингулярностей. Використання ГПП дозволяє підтримувати горизонтальний стан апарата під час донаведення. З точки зору чисельних методів, це забезпечує роботу алгоритмів у зоні, де значення $\cos \theta$ у кінематичних матрицях (8) є далекими від нуля. Це мінімізує похибки округлення при обчисленнях із плаваючою комою та запобігає виникненню помилок переповнення (overflow), що є критичним для надійності автономних систем.

Таким чином, запропонована математична модель є оптимізованою для реалізації у вбудованих системах жорсткого реального часу. Вона забезпечує необхідний компроміс між фізичною достовірністю та обчислювальною ефективністю, що створює фундамент для синтезу адаптивного контролера.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК У ДАНОМУ НАПРЯМІ

У статті вперше розроблено уточнену математичну модель динаміки БПЛА, яка, на відміну від існуючих підходів, що базуються на копланарних схемах із недостатньою актуацією, враховує векторну конфігурацію додаткових горизонтальних підрулюючих пристроїв. Це дозволило математично реалізувати повну алгоритмічну декупеляцію каналів позиціонування та орієнтації для забезпечення прецизійного маневрування апарата без зміни його кутового стану та створити умови для паралельної обробки обчислювальних потоків керування бортовою системою.

Запропонована у дослідженні математична модель динаміки чотирироторного безпілотного літального апарата з додатковими горизонтальними підрулюючими пристроями (ГПП) вирішує ключову науково-технічну суперечність між точністю навігаційного керування та обмеженістю бортових обчислювальних ресурсів. Використання надлишкової актуації дозволяє реалізувати незалежне керування положенням апарата без зміни його кутової орієнтації, що є критично важливим для етапу прецизійного донаведення в умовах зашумлених даних та зовнішніх збурень. Математичне обґрунтування моделі базується на законах Ньютона-Ейлера та враховує специфіку SWaP-обмежень вбудованих систем, забезпечуючи високу фізичну достовірність при мінімальній алгоритмічній складності.

Важливою особливістю розробленої архітектури є повна повноранговість та детермінованість матриці актуації, що гарантує єдиний аналітичний розв'язок задачі розподілу керуючих зусиль зі сталою обчислювальною складністю $O(1)$. Це дозволяє уникнути ітераційних методів оптимізації та запобігти непередбачуваним часовим затримкам у циклі стабілізації, що є фундаментальною вимогою для систем жорсткого реального часу. Крім того, вибір кутів Ейлера для опису орієнтації в межах малих кутів нахилу забезпечує високу інтерпретованість для інтелектуальних алгоритмів та знижує навантаження на процесор через відсутність необхідності постійної нормалізації кватерніонів.

Впровадження концепції алгоритмічної декупеляції ступенів свободи створює умови для паралельного виконання обчислювальних потоків на багатоядерних системах на кристалі. Розділення контурів стабілізації орієнтації та горизонтального позиціонування спрощує архітектуру польотного програмного забезпечення та дозволяє мінімізувати латентність контуру керування. Такий підхід забезпечує прецизійне маневрування без ризику виникнення обчислювальних сингулярностей, оскільки робота системи зосереджена у зоні високої числової стабільності кінематичних матриць.

Застосування нейромережі RSEFNN для онлайн-ідентифікації нелінійних сил та зовнішніх збурень дозволяє радикально спростити аналітичний опис динаміки апарата. Заміна громіздких тригонометричних перетворень та розрахунків коріолісових сил єдиним адаптивним обчислювальним блоком суттєво знижує вимоги до обсягу програмної пам'яті та підвищує робастність системи до параметричних невизначеностей. У сукупності розроблена інтелектуально-робастна архітектура забезпечує необхідний рівень точності донаведення автономного БПЛА при збереженні високої швидкодії обчислювального ядра цифрового двійника.

References

1. Distributed Control of Cyber Physical System on Various Domains: A Critical Review / M. Hamzah et al. Systems. 2023. Vol. 11, no. 4. P. 208. URL: <https://doi.org/10.3390/systems11040208>.
2. Cooperative motion planning and control for aerial-ground autonomous systems: Methods and applications / R. Chai et al. Progress in Aerospace Sciences. 2024. Vol. 146. P. 101005. URL: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.101005>.
3. Unmanned Aerial Vehicles: Control Methods and Future Challenges / Z. Zuo et al. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2022. Vol. 9, no. 4. P. 601–614. URL: <https://doi.org/10.1109/jas.2022.105410>.
4. Devising a traffic control method for unmanned aerial vehicles with the use of gNB-IOT in 5G / H. Q. Nameer et al. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2022. Vol. 3, no. 9 (117). P. 56–59. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.260084>.
5. Improving Quality-of-Service in Cluster-Based UAV-Assisted Edge Networks / T. Bose et al. IEEE Transactions on Network and Service Management. 2022. P. 1. URL: <https://doi.org/10.1109/tnsm.2021.3139892>.
6. Damigos G., Lindgren T., Nikolakopoulos G. Toward 5G Edge Computing for Enabling Autonomous Aerial Vehicles. IEEE Access. 2023. Vol. 11. P. 3926–3941. URL: <https://doi.org/10.1109/access.2023.3235067>.
7. Sonugur G. A Review of quadrotor UAV: Control and SLAM methodologies ranging from conventional to innovative approaches. Robotics and Autonomous Systems. 2022. P. 104342. URL: <https://doi.org/10.1016/j.robot.2022.104342>.
8. Local Control of Unmanned Air Vehicles in the Mountain Area / P. Kurdel et al. Drones. 2022. Vol. 6, no. 2. P. 54. URL: <https://doi.org/10.3390/drones6020054>.
9. Autonomous flight insurance method of unmanned aerial vehicles Parot Mambo using semantic segmentation data / D. Naso et al. Radioelectronic and Computer Systems. 2023. No. 1. P. 147–154. URL: <https://doi.org/10.32620/reks.2023.1.12>.
10. Energy Efficient UAV Flight Control Method in an Environment with Obstacles and Gusts of Wind / M. Chodnicki et al. Energies. 2022. Vol. 15, no. 10. P. 3730. URL: <https://doi.org/10.3390/en15103730>.
11. Monitoring and Cordoning Wildfires with an Autonomous Swarm of Unmanned Aerial Vehicles / F. Saffre et al. Drones. 2022. Vol. 6, no. 10. P. 301. URL: <https://doi.org/10.3390/drones6100301>.
12. Floreano D., Wood R. J. Science, technology and the future of small autonomous drones. Nature. 2015. Vol. 521, no. 7553. P. 460–466. URL: <https://doi.org/10.1038/nature14542>.
13. Nex F., Remondino F. UAV for 3D mapping applications: a review. Applied Geomatics. 2013. Vol. 6, no. 1. P. 1–15. URL: <https://doi.org/10.1007/s12518-013-0120-x>.
14. Giernacki W. Minimum Energy Control of Quadrotor UAV: Synthesis and Performance Analysis of Control System with Neurobiologically Inspired Intelligent Controller (BELBIC). Energies. 2022. Vol. 15, no. 20. P. 7566. URL: <https://doi.org/10.3390/en15207566>.
15. Adaptive Sliding Mode Control for Quadrotor UAVs with Input Saturation / X. Shao et al. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2021. P. 1. URL: <https://doi.org/10.1109/tmech.2021.3094575>.