

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-84-23>

УДК 621.391.1, 621.391.8

РАЗОВИЙ Олександр

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0002-4708-7820>

e-mail: razovyioo@khmnu.edu.ua

ПИВОВАР Олег

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0000-0002-4041-1248>

e-mail: pyvovarov@khmnu.edu.ua

ГОЛЕВИЧ Олег

Хмельницький національний університет

<https://orcid.org/0009-0001-2987-6722>

e-mail: digasgo@gmail.com

МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ КЕРУЮЧИХ ПАРАМЕТРІВ ХАОТИЧНОГО ГЕНЕРАТОРА ЗА УМОВИ ДІЇ ЗАВАД В КАНАЛІ ЗВ'ЯЗКУ

У статті розглянуто задачу відновлення керуючих параметрів хаотичного генератора Ракліджа в умовах дії адитивних завад у каналі зв'язку. Досліджено вплив співвідношення сигнал/шум (SNR) та ступеня згладжування прийнятого сигналу на точність оцінювання параметрів системи. Показано, що існує оптимальна комбінація рівня шуму та сили фільтрації, за якої забезпечується найменша похибка відновлення. Виведено характеристичні залежності між часом усереднення та співвідношенням сигнал/шум у каналі зв'язку.

Ключові слова: хаотичний генератор Ракліджа, керуючі параметри генератора хаосу, адитивний шум у каналі зв'язку, співвідношення сигнал/шум (SNR), рухоме середнє, відновлення параметрів за часовими рядами, однокоекспоненційна апроксимація, завадостійкі системи зв'язку.

RAZOVYI Oleksandr, PYVOVAR Oleh, GOLEVYCH Oleg

Khmelnitskyi National University

METHOD FOR RECOVERING CONTROL PARAMETERS OF A CHAOTIC GENERATOR UNDER ADDITIVE NOISE IN THE COMMUNICATION CHANNEL

This paper addresses the problem of reliable recovery of control parameters of a chaotic generator operating under additive noise in a communication channel. Accurate estimation of such parameters is a key requirement for chaos-based communication systems, where information can be encoded in the values of system parameters rather than in the waveform itself. In noisy channels, however, the chaotic signal and its attractor are significantly distorted, which makes direct parameter estimation from observed time series a challenging task.

The study focuses on the Rucklidge chaotic generator, chosen due to its well-known properties and suitability for analytical and numerical analysis. The influence of additive noise intensity, expressed through the signal-to-noise ratio (SNR), and the duration of moving average smoothing applied to the received signal on the accuracy of parameter recovery is systematically investigated. An analytical approach is combined with numerical simulation to derive instantaneous estimates of the generator control parameters, which are then statistically processed using median averaging over finite observation intervals.

The results demonstrate that parameter estimation errors exhibit a nonlinear dependence on both SNR and the smoothing window duration. For each control parameter, there exists an optimal combination of noise level and averaging window that minimizes the recovery error. Based on extensive numerical experiments, regions of reliable parameter recovery are identified using a $\pm 2\%$ relative error criterion. These regions define practical operating limits for chaos-based communication systems in the presence of additive noise.

Furthermore, the obtained boundary data are approximated using single-exponential models that describe the relationship between the required averaging window duration and SNR. The resulting analytical expressions provide a compact and practical tool for adaptive receiver design, allowing the smoothing parameters to be dynamically adjusted according to the current noise conditions in the channel. This enables a favorable trade-off between noise robustness and information transmission speed.

The proposed method enhances the feasibility of parameter-based chaotic modulation schemes and can be extended to other classes of chaotic generators and more complex channel models, making it relevant for the development of secure and noise-robust communication systems.

Keywords: Rucklidge chaotic generator, control parameters of chaotic generator, additive noise in the communication channel, signal-to-noise ratio (SNR), moving average filtering, parameter recovery from time series, single-exponential fitting, noise-robust communication systems

Стаття надійшла до редакції / Received 30.09.2025

Прийнята до друку / Accepted 22.08.2025

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Однією з важливих наукових задач є забезпечення надійного відновлення керуючих параметрів хаотичного генератора на приймальному боці, особливо в умовах дії шумів у каналі зв'язку. Від точності

цього відновлення залежить можливість коректного декодування інформації та швидкості передачі інформації, що робить задачу актуальною як для розвитку теорії хаотичних систем зв'язку, так і для практичних застосувань у галузі захищених телекомунікацій.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Використання хаотичних генераторів та хаотичних сигналів знаходить застосування у сучасних системах зв'язку, як в експериментальних/лабораторних пристроях, так і в комерційних системах. Серед лабораторних хаотичних систем зв'язку можна відзначити оптоволоконні системи[1,2], системи з хаотичним шифруванням[3], оптичні системи[4-6], радіо системи[7,8]. У всіх системах зв'язку демонструється висока швидкість передачі інформації (1 – 64 Гбіт/с) та велика дальність передачі, до 130 км, в залежності від умов та типу каналу зв'язку. Також існують сучасні комерційні системи, що використовують генератори хаосу: GNU Radio «gr-chaos» (2012) – програмний модуль для реалізації хаотичних модуляцій DCSK для SDR[9]; ChaosKey (Altus Metrum, 2016) – апаратний USB-генератор випадкових чисел на основі хаотичного джерела сигналів[10]; Chaotic Sequence Spread-Spectrum (CSSS) – сімейство LPI/LPD-хвильових форм для малопотенційного захищеного зв'язку (розроблено Cryptic Vector під DARPA/SOCOM, 2020)[11]; UWB Direct Chaotic Communication (Samsung/IRE, 2004) – радіосистема надширокопосмугового зв'язку з прямою хаотичною модуляцією[12]; цифровий хаотичний модем (Harris Corp., патент US7593531B2, 2004)[13]; використання генераторів псевдовипадкових кодів на основі хаотичного відображення tent map для складання спредінг-послідовностей GNSS (патент WO2008065191A1, 2008)[14]; Хаотична метаповерхня (Пекінський університет) – програмована рефлекторна поверхня управління радіохвилями та FPGA-генератор хаосу (2025)[15].

Забезпечення достовірного відновлення таких керуючих параметрів на приймальному боці за наявності шумів у каналі зв'язку залишається відкритою проблемою. Дія адитивного шуму спотворює хаотичний сигнал та відповідний атрактор системи, суттєво ускладнюючи пряму оцінку параметрів з отриманого часового ряду. Властива хаотичним системам чутливість до початкових умов призводить до того, що навіть невеликі завади можуть викликати значні відхилення траєкторії та накопичення похибки при оцінюванні параметрів. Більшість існуючих методів відновлення параметрів (синхронізація, спостереження по одному виходу, багатопараметровий аналіз ряду, прямий підгін диференціальних рівнянь, машинне навчання [16-26]) розроблені переважно для ідеальних умов і не гарантують надійного результату у реальному зашумленому каналі. Таким чином, практичне завдання оцінювання параметрів генератора хаосу при наявності шуму досі пов'язане зі значними труднощами і вимагає вдосконалених підходів.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Для розв'язання зазначеної проблеми у роботі запропоновано метод, що поєднує аналітичний розрахунок параметрів, згладжування сигналу та статистичне усереднення оцінок. Метою дослідження є виявлення умов у каналі зв'язку, за яких можливе достовірне відтворення керуючих параметрів генератора хаосу за його часовими рядами.

У даній роботі як об'єкт аналізу обрано хаотичний генератор Ракліджа [27] завдяки його властивостям, що роблять його зручним для моделювання та теоретичного дослідження. Генератор Ракліджа демонструє класичний детермінований хаос і характеризується наявністю двох керуючих параметрів (L та K), які легко змінювати та які суттєво впливають на форму атрактора і спектральний склад вихідних сигналів.

Хаотичний генератор Ракліджа представлений у вигляді системи диференціальних рівнянь (1), де: x , y , z – вихідні сигнали генератора; K – константа, що відповідає за лінійне загасання (зі збільшенням пригнічує коливання); L – константа, що відповідає за лінійне підсилення (зі збільшенням посилює коливання). Зміна цих параметрів впливає на геометрію атрактора і спектральні властивості сигналів $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Отже пара (L, K) може виступати носієм символу інформації, аналогічно до положення точки у двовимірному сузір'ї цифрової модуляції.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Kx + Ly - yz; \\ \frac{dy}{dt} = x; \\ \frac{dz}{dt} = -z + y^2; \end{cases} \quad (1)$$

Для ітеративного вирішення в системі Matlab, рівняння генератора Ракліджа були записані і вирішені у різнищевій формі (2), використовуючи явний метод Ейлера. Для зменшення накопичення похибки розходження траєкторій обрано малий крок інтегрування $dt = 0.005$ с. В ході експерименту, в систему рівнянь (2) підставлено значення $L=2.1$, $K=6.7$.

$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)+dt \cdot (-K \cdot x(n) \cdot L \cdot y(n)-y(n) \cdot z(n)); \\ y(n+1)=y(n)+dt \cdot x(n); \\ z(n+1)=z(n)+dt \cdot (-z(n)+y(n)^2) \end{cases} \quad (2)$$

Для відновлення коефіцієнтів L і K , з системи рівнянь у різницевій формі (2) виражено їх значення (3, 4).

$$L(n)=\frac{x(n+1)}{dt \cdot y(n)}-\frac{x(n)}{dt \cdot y(n)}+\frac{K \cdot x(n)}{y(n)}+z(n) \quad (3)$$

$$K(n)=\frac{1}{dt}+\frac{L \cdot y(n)}{x(n)}-\frac{y(n) \cdot z(n)}{x(n)}-\frac{x(n+1)}{x(n) \cdot dt} \quad (4)$$

Для симуляції реальних умов в каналі зв'язку, до сигналів генератора застосовано адитивний шумовий сигнал. Внаслідок дії шуму в каналі зв'язку, форма сигналу та аттрактор генератора спотворюються (рис. 1), що ускладнює задачу відновлення керуючих параметрів.

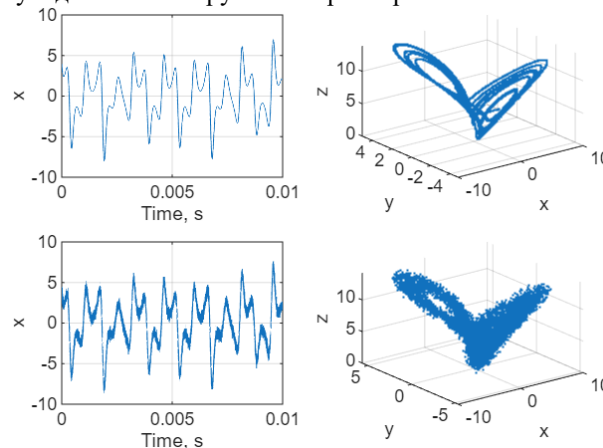


Рис. 1. Форма ідеального і зашумленого сигналів та відповідні аттрактори

Для відновлення коефіцієнтів зашумлені сигнали потрібно відфільтрувати, наприклад, за допомогою функції рухомого середнього з певним розміром вікна усереднення W_d (5). Цей простий лінійний фільтр зменшує високочастотну шумову складову і підвищує ефективне SNR без необхідності складних адаптивних або вейвлет-методів. Такий прийом відомий як недорога засобами реалізації стратегія підвищення завадостійкості в хаотичних радіоканалах.

$$SMA_t=\frac{1}{W_d} \sum_{W_d=0}^{W_d-1} p_{t-i} \quad (5)$$

де W_d – розмір вікна усереднення, p_{t-i} – елемент підмножини вікна усереднення.

Застосувавши виведені формули (3,4), до зашумлених часових рядів X , Y , Z тривалістю 1.2 мс, для кожної пари значень сигнал/шум та розміру вікна усереднення отримано значення відновленого параметру, шляхом медіанного усереднення $K(t)$ та $L(t)$ на проміжку часу у 1.2 мілісекунди (рис. 2).

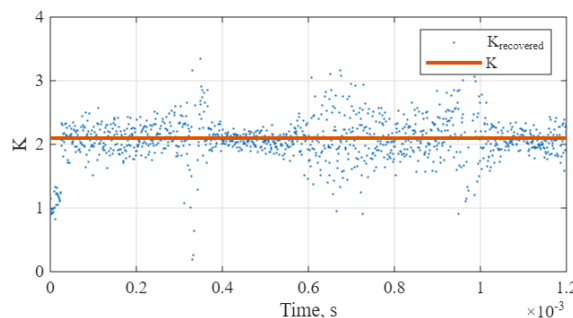


Рис. 2. Приклад відновленого значення ($K_{recovered}$) та його дійсне значення (K)

Під дією адитивного шуму миттєві оцінки $K_{recovered}(t)$ «коливаються» навколо еталонного значення без помітного систематичного зміщення, утворюючи симетричне розсіювання точок відносно червоної лінії. За таких умов застосування медіанного усереднення до послідовностей на інтервалі 1,2 мс дає оцінку, практично збіжну з істинним значенням параметра, що свідчить про відсутність зміщення енергії розсіювання оцінок відносно «центру». Спираючись на цю властивість, було побудовано алгоритм кількісної оцінки похибки відновлення керуючих параметрів для різних комбінацій рівня шуму в каналі та тривалості вікна фільтра рухомого середнього (рис. 3).

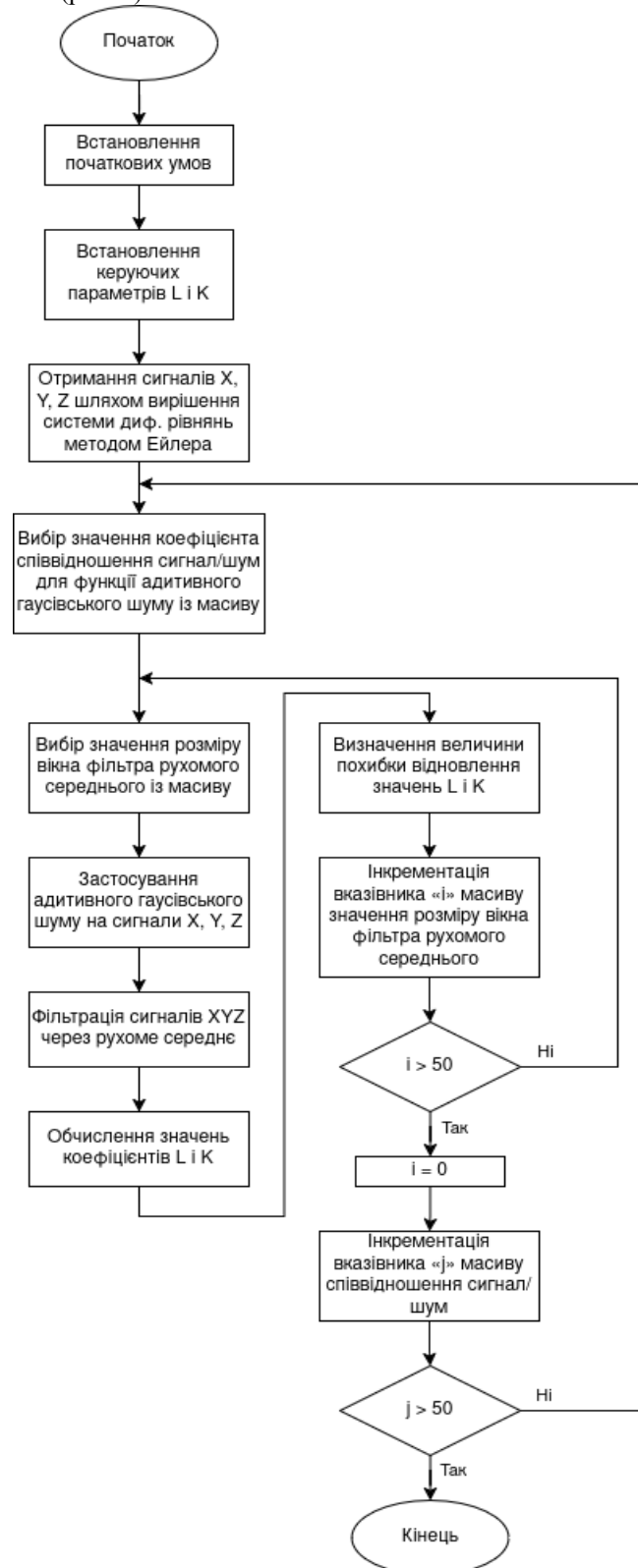


Рис. 3. Алгоритм визначення похибки відновлення керуючих параметрів

Вплив інтенсивності шуму та розміру вікна усереднення на якість відновлення має нелінійний характер і призводить до різкого зростання похибки після досягнення певного порогу завад (рис. 4).

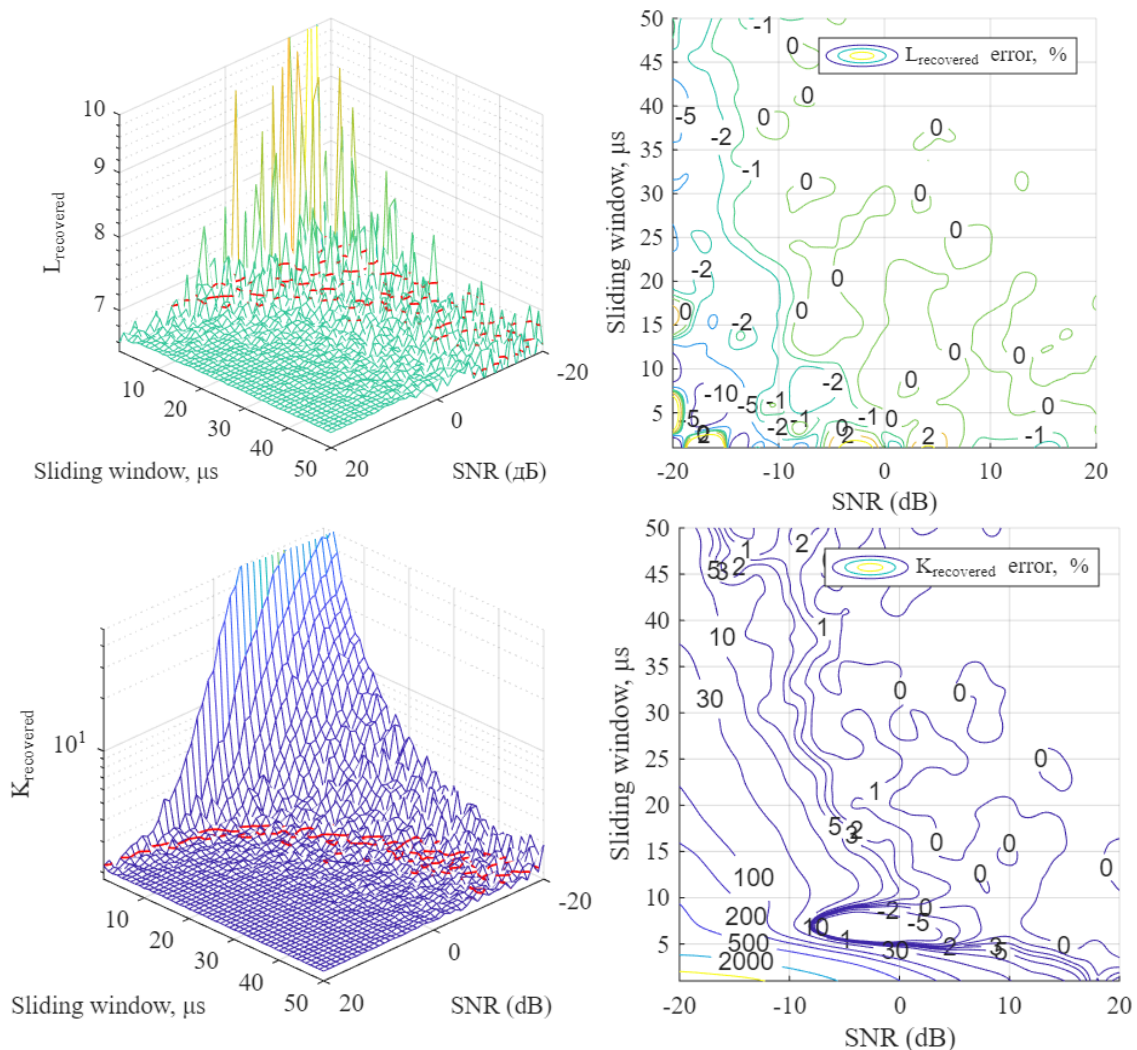


Рис. 4. Поверхні розподілу значень відновлених параметрів K і L (праворуч) та ізолінії відхилень від дійсного значення, % (ліворуч)

Поверхні похибок відновлення параметрів L та K містять області насичення (плато), в яких значення відносних помилок $L_{\text{recovered error, \%}}$ та $K_{\text{recovered error, \%}}$ наближаються до нуля. Ці області відповідають режимам, за яких збільшення тривалості вікна усереднення W_d та/або підвищення співвідношення сигнал/шум SNR забезпечує ефективне придушення шумової складової. У дослідженні еталонними обрано значення параметрів $L = 2.1$ та $K = 6.7$.

Для кількісного виділення робочих діапазонів введено критерій допустимої похибки $\pm 2\%$ від еталонних значень L і K ; відповідні ізолінії позначено на поверхнях розподілу похибок червоним кольором (рис. 4, зліва). Згідно з цим критерієм визначено межі достовірного відновлення обох керуючих параметрів: для K — за співвідношення сигнал/шум $SNR \approx -13$ дБ при тривалості вікна усереднення 40 мкс або $SNR \approx -3$ дБ при $W_d = 10$ мкс; для L — за $SNR \approx -18$ дБ при $W_d = 25$ мкс або $SNR \approx -7$ дБ при $W_d = 5$ мкс. Таким чином, компроміс між тривалістю вікна усереднення та вимогами до SNR має виражений нелінійний характер і не може бути описаний простою лінійною залежністю.

Для подальшого формалізованого аналізу отримані двовимірні залежності було дискретизовано: значення відносної похибки відновлення параметрів K і L для всіх комбінацій W_d та SNR занесено до табл. 1 і табл. 2 відповідно. У цих таблицях області, що задовольняють критерію $|\text{error}| \leq 2\%$, виділено напівжирним шрифтом, що дає змогу наочно ідентифікувати робочі зони та їх границі та надалі використовувати їх для побудови узагальненої апроксимаційної залежності ($W_d^x = f(SNR)$, мкс) тривалості вікна спостереження W_d як функції від SNR для кожного із параметрів K і L відповідно.

Таблиця 1.

Значення поверхні відхилення від дійсного значення відновленого параметру K

W_d , μs	SNR, dB																			
	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
5	673	555	450	358	285	223	170	123	83,3	54,1	33,1	18,5	9,1	2,8	0,5	0,3	0	-1,4	-2,4	-1,7
7	287	216	153	104	67	39,8	19,4	2,2	-10,8	-18,9	-21,6	-22,3	-19,7	-16,5	-13	-9,9	-7,1	-5,7	-4,6	-3,4
9	222	176	136	104	78,2	56,3	37,5	22,1	12,4	7,2	3,4	0,9	0,3	0	-0,3	-0,2	0,3	0,5	0,2	0,1
11	173	144	117	92,6	71,8	53,8	39,2	28,3	20,8	16,2	13,3	10,6	8,1	5,8	4,1	2,9	2,3	1,8	1,4	1,2
13	130	105	84,3	66,4	51,1	37,6	28,4	21,8	16,9	12,8	10,5	8,7	6,6	4,7	2,9	1,7	1,1	0,9	0,7	0,6
15	94,5	75,7	61,4	49,5	38,4	28,4	21,2	15,8	11,6	8,2	5,8	4,4	3,6	2,7	2,3	1,7	1,1	0,6	0,1	-0,2
17	71,9	59,9	49,1	39,5	30,8	22,7	15,7	11,3	8,6	6,4	4,1	2,4	1,5	1,5	1,7	1,3	0,9	0,6	0,2	-0,3
19	54,4	46,1	36,6	28,1	22	16,8	12,1	8,6	5,5	3	1,5	1,2	1,1	0,9	0,4	0,3	0	0	-0,1	-0,2
21	43,8	35,2	26,6	19,7	14,5	11,5	9,4	6,6	3,5	1,9	1,4	1,1	1,1	0,8	0,2	-0,3	-0,4	-0,4	-0,4	-0,4
23	35,7	28,6	21,5	15,4	11,5	9	7	5,6	3,7	1,9	1,2	1,4	1,6	1,6	1,2	0,7	0,1	-0,2	-0,2	-0,1
25	31,3	24,2	18,2	13,4	9,3	6,2	4,5	3,1	1,9	1,2	1	1,1	1,4	1,8	1,8	1,2	0,4	0,1	0,1	0,2
27	23,4	17,3	12,8	9,2	6,6	4,2	2,2	1,2	0,5	0,3	0,6	0,9	1,2	1	0,5	0,1	0	0	0,2	0,1
29	18,8	11,7	7,2	5,1	4,2	3,6	2,6	1	0,1	0,4	1,2	1,4	1,2	0,7	0,1	-0,3	-0,1	0,1	0	-0,2
31	15,3	9,4	5,6	4,1	3,2	3	2,5	1,2	0,3	0,2	0,3	0,7	0,8	0,6	0,4	0,1	-0,1	-0,1	-0,2	-0,2
33	11,3	8,3	6,7	5,5	3,9	2	1,2	0,7	0	-0,2	0,2	0,6	0,7	0,6	0,4	-0,1	-0,2	-0,2	-0,3	-0,2
35	9,7	8,2	6,7	5,5	4,2	2,9	1,8	0,9	0	-0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2	0	-0,3	-0,2	-0,3	-0,3
37	7,5	6,4	5,6	5,2	4,4	3,2	2,6	2	1,5	0,5	-0,3	-0,7	-0,7	-0,5	-0,5	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,4
39	6,4	5,1	4,6	4,2	3,7	3,2	2,7	2	1,3	0,5	-0,1	-0,5	-0,6	-0,6	-0,4	-0,3	-0,5	-0,8	-0,9	-0,8
41	7,7	6	4,8	4,2	3,7	3,1	1,8	0,6	0	-0,1	0	-0,1	-0,2	-0,2	0,1	0,1	-0,1	-0,7	-0,8	-0,7
43	6,5	6,3	5,5	4,8	3,5	2,1	1,2	0,4	-0,2	-0,1	-0,1	-0,4	-0,4	-0,2	0,1	0,3	0,3	0,1	-0,2	-0,3

Таблиця 2.

Значення поверхні відхилення від дійсного значення відновленого параметру L

W_d , μs	SNR, dB																			
	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	-4,1	23,2	41,1	33,1	1,8	-22,5	-11,2	-1,5	-7,2	-5,8	-2,7	-10	-3,9	-0,8	2,9	5,9	8,6	10,4	4,2	-0,4
3	-3,4	-7	-4,3	-1,5	-3,1	-7,4	-9,1	-4,7	-3,3	-2,6	-0,7	0,8	-0,9	-1,5	0,3	1	0,4	-0,2	-0,6	-0,9
5	-0,7	-11,4	-15,4	-15,3	-10,6	-7,1	-5,2	-1,7	-0,7	-0,8	-1,4	-2,2	-1,8	-1,3	-1,4	-1,6	-1,4	-1,1	-0,6	-0,1
7	-3,1	-9,6	-12,7	-13,4	-10,8	-8,1	-4,7	-2,2	-1,1	-1	-1,9	-3,9	-4,6	-3,7	-2,4	-1,7	-0,7	0,2	0,8	0,7
9	-8,7	-7,7	-8,6	-8,2	-7,6	-5,4	-4,6	-4,5	-3,3	-1,5	-1,7	-3,1	-3,9	-3,3	-2,4	-1,3	-0,5	0,4	0,9	1
11	-8,3	-6,2	-5,3	-4,9	-4	-3,6	-3,6	-3,8	-3,3	-1,9	-1,3	-1,2	-0,8	-0,7	-0,8	-0,8	-0,5	-0,1	0,2	0,5
13	-3,8	-4,7	-5	-4,4	-2,6	-1,2	-1,4	-2,1	-2,3	-1,5	-0,4	0,6	1	0,9	0,3	-0,1	-0,2	-0,2	0	0,2
15	0,6	-2,3	-4,5	-5,1	-3,4	-1,7	-1,6	-2,5	-2,7	-1,9	-0,6	0,6	1	0,9	0,6	0,4	0,2	0	-0,1	0
17	0,7	-1	-3,3	-4,1	-3,6	-2,8	-2,4	-2,3	-2,2	-2	-1,1	-0,2	0,3	0,5	0,5	0,3	0	-0,2	-0,2	0
19	-2,4	-2,1	-1,4	-2,3	-3,6	-3,8	-3	-2,7	-2,6	-2,1	-1,2	-0,5	0,1	0,4	0,3	-0,1	-0,4	-0,6	-0,4	0
21	-2,6	-2,2	-1,7	-2,4	-3,3	-3,3	-3,2	-2,6	-2,2	-1,5	-0,9	-0,4	0	0,1	0,1	-0,2	-0,5	-0,6	-0,4	-0,1
23	-4,1	-2,7	-2,1	-2,4	-2,8	-2,5	-1,9	-1,2	-0,9	-0,5	-0,2	0	0,1	0,2	0,1	-0,1	-0,2	-0,3	-0,3	-0,2
25	-3,2	-1,9	-1,8	-2,3	-2,1	-1,3	-0,8	-0,5	-0,4	-0,1	-0,1	-0,1	-0,2	-0,3	-0,1	0,1	0,1	-0,1	-0,3	-0,3
27	-3,7	-3,5	-3,1	-2,4	-1,7	-0,8	-0,4	-0,4	-0,5	-0,4	-0,1	-0,2	-0,5	-0,5	-0,3	0	0,1	0	0	-0,1
29	-4,8	-4,7	-3,8	-2,3	-1,3	-0,9	-0,6	-0,5	-0,6	-0,3	0	0,1	0	-0,1	-0,2	-0,2	-0,2	0	0,1	0,1
31	-5	-4,6	-3,6	-2,5	-1,8	-1,4	-1,1	-0,7	-0,4	-0,2	-0,1	0	0,1	0,1	0	-0,1	-0,3	-0,3	-0,1	0
33	-4,7	-4,9	-3,9	-2,8	-1,6	-1,1	-1	-1	-0,7	-0,5	-0,4	-0,2	-0,1	-0,2	-0,2	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3	-0,3
35	-4,9	-4,7	-3,7	-2,4	-1,4	-0,9	-0,7	-0,8	-0,6	-0,5	-0,4	-0,5	-0,3	-0,3	-0,2	-0,3	-0,3	-0,3	-0,4	-0,4
37	-4,7	-4,2	-3,4	-2,6	-1,8	-1,4	-0,8	-0,1	0,3	0,3	-0,1	-0,5	-0,6	-0,4	-0,3	-0,4	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2
39	-5,4	-4,1	-3	-2,3	-1,8	-1,2	-0,6	-0,2	0,1	0,1	-0,1	-0,2	-0,3	-0,3	-0,4	-0,4	-0,3	-0,2	-0,2	-0,2

Границю достовірного відновлення параметрів L та K вирішено встановити на рівні 2% як компроміс між якістю відновлення та швидкодією. Таким чином із таблиць 1 і 2 можливо встановити оптимальне значення вікна усереднення в залежності від потужності діючого шуму у каналі зв'язку.

Для виведення залежності розміру вікна усереднення від SNR, з таблиць 1 і 2 вибрано граничні пари значень (W_d , SNR) на рівні $\pm 2\%$ відхилення від дійсного значення відповідного параметру.

На підставі аналізу цих експериментальних даних як таку, що найкраще відтворює їхню поведінку, було обрано модель однокоефіцієнтної апроксимації (6).

$$y(x)=a \cdot e^{bx}, \quad (6)$$

де a — амплітудний коефіцієнт (масштабний множник), b — показник експоненти, що визначає швидкість зростання або спаду функції, а x — незалежна змінна.

Під час побудови апроксимаційної залежності частину експериментальних точок, позначених на рис. 5 червоними позначками, було виключено з розгляду. Попри те, що формально вони потрапляють у діапазон $|\text{error}| \leq 2\%$, ці точки суттєво віддалені від основної границі та відповідають режимам з надмірно великою потужністю шуму, для яких поява поодиноких «вдалих» оцінок на довгих інтервалах спостереження є статистично малоімовірною і не має практичного фізичного змісту, тому при апроксимації вони не розглядалися.

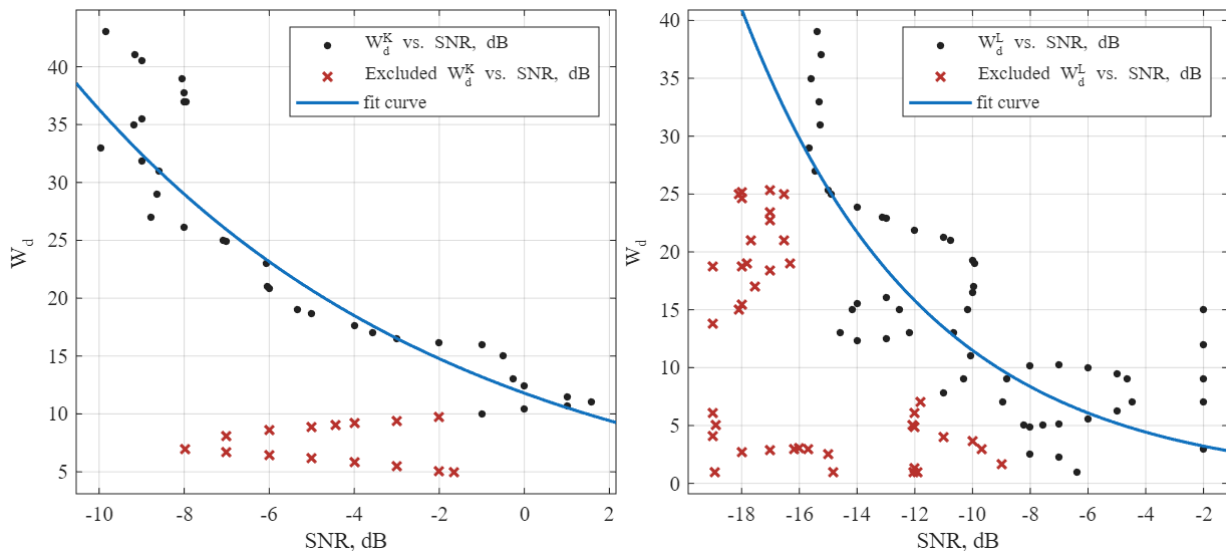


Рис. 5. Залежність границі достовірного відновлення параметру K (зліва) L (зправа) на рівні $\pm 2\%$ від W_d і SNR , та підбір апроксимаційних кривих

Оцінювання параметрів a та b здійснюється методом найменших квадратів. Мінімізується функція квадратичної похибки (7).

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - a \cdot e^{bx_i}]^2, \quad (7)$$

де (x_i, y_i) — експериментальні точки, N — їх кількість. Оскільки модель є нелінійною за параметром b , це завдання розв'язується як задача нелінійної регресії. Matlab застосовує чисельні алгоритми нелінійного методу найменших квадратів (зокрема алгоритми trust-region та Левенберга–Марквардта) для пошуку таких значень a та b , які мінімізують $S(a, b)$.

Використовуючи метод одноекспоненційної апроксимації, отримано такі значення параметрів a та b : для кривої, що описує граничні значення тривалості вікна усереднення для параметра K , $a_K = 11.796$, $b_K = -0.1124$; для параметра L відповідно $a_L = 2.344$, $b_L = -0.159$. Коефіцієнт a визначає масштаб (номінальний рівень) тривалості вікна при нульовому або близькому до нуля значенні SNR , тоді як коефіцієнт b характеризує швидкість експоненційного спадання необхідної тривалості вікна зі зростанням співвідношення сигнал/шум.

Підставивши ці коефіцієнти у рівняння (6), отримуємо робочі аналітичні залежності для оцінки оптимальної тривалості вікна усереднення W_d^K та W_d^L в залежності від значення SNR для коефіцієнтів K (8) і L (9) відповідно:

$$W_d^K = 11.796 \cdot e^{-0.1124 \cdot SNR} \quad (8)$$

$$W_d^L = 2.344 \cdot e^{-0.159 \cdot SNR} \quad (9)$$

Таким чином, отримано компактні експоненційні моделі, які узагальнюють результати чисельного експерименту та задають однозначну відповідність між потужністю шуму в каналі зв'язку та рекомендованою тривалістю вікна усереднення для забезпечення похибки відновлення значень кожного із керуючих коефіцієнтів не більше 2 %. На практиці це дозволяє реалізувати в приймачі просту адаптивну процедуру: за оціненим значенням SNR миттєво обчислювати W_d^K та W_d^L за (8)–(9) та налаштовувати параметри фільтрації без додаткового перебору або емпіричного підстроювання. Зменшення вікна при високому SNR і його

збільшення при низькому SNR забезпечує мінімально необхідну тривалість обчислень на один біт інформації за умови збереження заданої точності відновлення керуючих параметрів.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК У ДАНОМУ НАПРЯМІ

У цій статті вдалося знайти межі відновлення керуючих параметрів, в яких похибка відновленого значення не перевищувала 2% за різною інтенсивністю адитивного шуму в каналі та різним розміром вікна усереднення. Показано, що відновлення коефіцієнту K можливе за умови співвідношення сигнал/шум -13дБ при розмірі вікна усереднення в 40мкс, або -3дБ при 10мкс. Відновлення коефіцієнту L можливе за умови співвідношення сигнал/шум -18дБ при розмірі вікна усереднення в 25мкс, або -7дБ при 5мкс. Виявлені рамки достовірного відновлення керуючих коефіцієнтів визначають практичну швидкість та максимальну кількість мод в каналі зв'язку за умови кодування пар L і K як точки двовимірної сузір'явої решітки (напр. FDM, CDM, TDM) по критерію мінімального захисного інтервалу між сусідніми значеннями пар L і K (модами).

Крім того, отримано характеристичні залежності W_d^K та W_d^L , які визначають оптимальну тривалість вікна усереднення залежно від співвідношення сигнал/шум у каналі зв'язку. Ці залежності можуть бути покладені в основу адаптивного програмного забезпечення приймача, у якому параметри усереднення прийнятого сигналу автоматично змінюються відповідно до поточного рівня шуму, що дає змогу забезпечити максимально можливу швидкість передавання інформації за умов динамічної зміни характеристик каналу зв'язку.

У подальших дослідженнях доцільно розширити запропонований підхід на випадки більш складних каналів зв'язку, зокрема з наявністю не лише адитивного білого шуму, а й імпульсних та корельованих завад, а також багатопробеневого поширення. Перспективним напрямом є узагальнення методу для інших класів хаотичних генераторів (Лоренца, Чуа, гіперхаотичних систем тощо) та порівняння досяжних меж достовірного відновлення параметрів між різними моделями, що дозволить обґрунтовано обирати тип генератора для заданих вимог до швидкодії та завадостійкості системи зв'язку. Окремий інтерес становить поєднання аналітичного відновлення параметрів із сучасними методами нелінійної фільтрації (калманівські фільтри, вейвлет-фільтрація, тощо) і методами оптимізації/машинного навчання для покращення точності оцінок у умовах низького SNR.

Ще одним перспективним напрямом є інтеграція одержаних залежностей між SNR та оптимальним вікном усереднення у повноцінну модель системи хаотичного зв'язку у фізичному та каналному рівнях.

Література

1. Argyris A, Syvridis D, Larger L, et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. *Nature*. 2005;438(7066):343-346. <https://doi.org/doi:10.1038/nature04275>
2. Zhongyang Wang, Lei Shen, Min Yang, Ziyi Tang, Lei Zhang, Changkun Yan, Liubo Yang, Ruichun Wang, Jun Chu, Jing Du, and Jian Wang, "High-speed chaos-based secure optical communications over 130-km multi-core fiber," *Opt. Lett.* 48, 4440-4443 (2023). <https://doi.org/10.1364/OL.495619>
3. Du J, Wang Y, Fei C, et al. Experimental demonstration of 50-m/5-Gbps underwater optical wireless communication with low-complexity chaotic encryption. *Opt Express*. 2021;29(2):783-796. <https://doi.org/10.1364/OE.416117>
4. Zaminga, S., Martinez, A., Huang, H. et al. Optical chaotic signal recovery in turbulent environments using a programmable optical processor. *Light Sci Appl* 14, 131 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41377-025-01784-3>
5. Yang Y, Chen C, Zhang W, et al. Secure and private NOMA VLC using OFDM with two-level chaotic encryption. *Opt Express*. 2018;26(26):34031-34042. <https://doi.org/10.1364/OE.26.034031>
6. Mahmud, N., MacGillivray, A., Rai, A. et al. Combining quantum key distribution with chaotic systems for free-space optical communications. *Quantum Inf Process* 20, 354 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11128-021-03299-3>
7. Whitney, D. A. *Wireless Communication Demonstration in Hardware Using an Exactly Solvable Chaotic System*. Auburn University. 2019.
8. Dmitriev, A.S., Efremova, E.V., Itskov, V.V. et al. Direct Chaotic Ultra-Wideband Wireless Communications in the Very High Frequency and Ultra High Frequency Radio Bands. *J. Commun. Technol. Electron*. 67, 1013–1021 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1064226922080046>
9. Kaddoum, G., Olivain, J., Samson, G. B., Giard, P., Gagnon, F. Implementation of a Differential Chaos Shift Keying Communication system in GNU Radio. *International Symposium on Wireless Communication Systems*. 2012. №9. <https://doi.org/10.1109/ISWCS.2012.6328505>
10. Altus Metrum, «ChaosKey». URL: <http://altusmetrum.org/ChaosKey>
11. Cryptic Vector LLC, Low SWaP Tactical Ultra-Secure Communications System. URL: https://swx-project-prod.s3.amazonaws.com/CPO_55_SBIR_22_1_Phase_I_Cryptic_Vector_FINAL_Transition_Quad.pdf
12. Chong, Chia-Chin & Yong, Su & Lee, Seong. (2005). UWB Direct Chaotic Communication Technology. *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*. 4. 316 - 319. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2005.855632>
13. Methods and systems for transceiving chaotic signals пат. US7593531B2 США; заявл. 07.05.2004;

опубл. 22.09.2009.

14. Chaotic spreading codes and their generation пат. WO2008065191A1 Люксембург; заявл. 30.11.2007; опубл. 05.06.2008.

15. Xu, J.W., Wei, M., Zhang, L. et al. Chaotic information metasurface for direct physical-layer secure communication. Nat Commun 16, 5853 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41467-025-60725-1>

16. Mossayebi, F., Qammar, H. K., & Hartley, T. T. Adaptive estimation and synchronization of chaotic systems. Physics Letters A. 1991. №161. C. 255-262. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(91\)90013-X](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90013-X)

17. Baake, E., Baake, M., Bock, H. G., & Briggs, K. M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. Physical Review A. №45. C. 5524-5529. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.5524>

18. Parlitz, U. Estimating model parameters from time series by autosynchronization. Physical Review Letters. 1996. №76. C. 1232-1235. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1232>

19. Tao, C., Zhang, Y., Du, G., & Jiang, J. J. Estimating model parameters by chaos synchronization. Physical Review E. 2004. №69. ID 036204. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.036204>

20. Zhang, Y., Tao, C., & Jiang, J. J. Theoretical and experimental studies of parameter estimation based on chaos feedback synchronization. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Dynamics. 2006. №16. ID 043122. <https://doi.org/10.1063/1.2404356>

21. Chen, M., & Kurths, J. Chaos synchronization and parameter estimation from a scalar output signal. Physical Review E. 2007. №76. ID 027203. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.027203>

22. Прикладне застосування теорії хаотичних систем у телекомунікаціях : монографія / Ю. Я. Бобало, С. Д. Галюк, М. М. Климаш, Р. Л. Політанський; Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". – Львів; Дрогобич : Коло, 2015. – 184 с.

23. Golevych, O., Pyvovar, O., Dumenko, P. "Synchronization of non-linear dynamic systems under the conditions of noise action in the channel", Latvian Journal of Physics and Technical Sciences, Volume 55, Issue 3, 1 June 2018, Pages 70-76 <https://doi.org/10.2478/lpts-2018-0023>

24. Pyvovar, O.S., Polikarovskiykh, O.I. A System of Secure Communication with Chaos Masking Based on Rucklidge Generators, 2018 IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO 2018 - Proceedings <https://doi.org/10.1109/ELNANO.2018.8477566>

25. Sheludko, A. S. Parameter estimation for one-dimensional chaotic systems by guaranteed algorithm and particle swarm optimization. IFAC-PapersOnLine. 2018. №51. C. 337-342. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.406>

26. Springer, S., Haario, H., Shemyakin, V., Kalachev, L., & Shchepakina, D. Robust parameter estimation of chaotic systems. Inverse Problems and Imaging. 2019. №13. C. 1189-1212. <https://doi.org/10.3934/ipi.2019053>

27. Rucklidge, A.M. Chaos in models of double convection. Journal of Fluid Mechanics. 1992. №237. C. 209-229. <https://doi.org/10.1017/S0022112092003392>

References

1. Argyris A, Syvridis D, Larger L, et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. Nature. 2005;438(7066):343-346. <https://doi.org/doi:10.1038/nature04275>
2. Zhongyang Wang, Lei Shen, Min Yang, Ziyi Tang, Lei Zhang, Changkun Yan, Liubo Yang, Ruichun Wang, Jun Chu, Jing Du, and Jian Wang, "High-speed chaos-based secure optical communications over 130-km multi-core fiber," Opt. Lett. 48, 4440-4443 (2023). <https://doi.org/10.1364/OL.495619>
3. Du J, Wang Y, Fei C, et al. Experimental demonstration of 50-m/5-Gbps underwater optical wireless communication with low-complexity chaotic encryption. Opt Express. 2021;29(2):783-796. <https://doi.org/10.1364/OE.416117>
4. Zaminga, S., Martinez, A., Huang, H. et al. Optical chaotic signal recovery in turbulent environments using a programmable optical processor. Light Sci Appl 14, 131 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41377-025-01784-3>
5. Yang Y, Chen C, Zhang W, et al. Secure and private NOMA VLC using OFDM with two-level chaotic encryption. Opt Express. 2018;26(26):34031-34042. <https://doi.org/10.1364/OE.26.034031>
6. Mahmud, N., MacGillivray, A., Rai, A. et al. Combining quantum key distribution with chaotic systems for free-space optical communications. Quantum Inf Process 20, 354 (2021). <https://doi.org/10.1007/s1128-021-03299-3>
7. Whitney, D. A. Wireless Communication Demonstration in Hardware Using an Exactly Solvable Chaotic System. Auburn University. 2019.
8. Dmitriev, A.S., Efremova, E.V., Itskov, V.V. et al. Direct Chaotic Ultra-Wideband Wireless Communications in the Very High Frequency and Ultra High Frequency Radio Bands. J. Commun. Technol. Electron. 67, 1013–1021 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1064226922080046>
9. Kaddoum, G., Olivain, J., Samson, G. B., Giard, P., Gagnon, F. Implementation of a Differential Chaos Shift Keying Communication system in GNU Radio. International Symposium on Wireless Communication Systems. 2012. №9. <https://doi.org/10.1109/ISWCS.2012.6328505>
10. Altus Metrum, «ChaosKey». URL: <http://altusmetrum.org/ChaosKey>
11. Cryptic Vector LLC, Low SWaP Tactical Ultra-Secure Communications System. URL: https://swx-project-prod.s3.amazonaws.com/CPO_55_SBIR_22_1_Phase_I_Cryptic_Vector_FINAL_Transition_Quad.pdf
12. Chong, Chia-Chin & Yong, Su & Lee, Seong. (2005). UWB Direct Chaotic Communication Technology. Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE. 4. 316 - 319. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2005.855632>
13. Methods and systems for transceiving chaotic signals, US patent US7593531B2, USA; filed 07.05.2004; published 22.09.2009.
14. Chaotic spreading codes and their generation, WO patent WO2008065191A1, Luxembourg; filed 30.11.2007; published 05.06.2008.
15. Xu, J.W., Wei, M., Zhang, L. et al. Chaotic information metasurface for direct physical-layer secure communication. Nat Commun 16, 5853 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41467-025-60725-1>
16. Mossayebi, F., Qammar, H. K., & Hartley, T. T. Adaptive estimation and synchronization of chaotic systems. Physics Letters A.

1991. №161. С. 255-262. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(91\)90013-X](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90013-X)
17. Baake, E., Baake, M., Bock, H. G., & Briggs, K. M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. Physical Review A. №45. С. 5524-5529. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.5524>
18. Parlitz, U. Estimating model parameters from time series by autosynchronization. Physical Review Letters. 1996. №76. С. 1232-1235. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1232>
19. Tao, C., Zhang, Y., Du, G., & Jiang, J. J. Estimating model parameters by chaos synchronization. Physical Review E. 2004. №69. ID 036204. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.036204>
20. Zhang, Y., Tao, C., & Jiang, J. J. Theoretical and experimental studies of parameter estimation based on chaos feedback synchronization. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Dynamics. 2006. №16. ID 043122. <https://doi.org/10.1063/1.2404356>
21. Chen, M., & Kurths, J. Chaos synchronization and parameter estimation from a scalar output signal. Physical Review E. 2007. №76. ID 027203. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.027203>
22. Applied application of the theory of chaotic systems in telecommunications: monograph / Yu. Ya. Bobalo, S. D. Galyuk, M. M. Klymash, R. L. Politsansky; Ministry of Education and Science of Ukraine, National University "Lviv Polytechnic". – Lviv; Drohobych: Kolo, 2015. – 184 p.
23. Golevych, O., Pyvovar, O., Dumenko, P. "Synchronization of non-linear dynamic systems under the conditions of noise action in the channel", Latvian Journal of Physics and Technical Sciences, Volume 55, Issue 3, 1 June 2018, Pages 70-76 DOI: <https://doi.org/10.2478/lpts-2018-0023>
24. Pyvovar, O.S., Polikarovskiykh, O.I. A System of Secure Communication with Chaos Masking Based on Rucklidge Generators, 2018 IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO 2018 - Proceedings <https://doi.org/10.1109/ELNANO.2018.8477566>
25. Sheludko, A. S. Parameter estimation for one-dimensional chaotic systems by guaranteed algorithm and particle swarm optimization. IFAC-PapersOnLine. 2018. №51. С. 337-342. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.406>
26. Springer, S., Haario, H., Shemyakin, V., Kalachev, L., & Shchepakina, D. Robust parameter estimation of chaotic systems. Inverse Problems and Imaging. 2019. №13. С. 1189-1212. <https://doi.org/10.3934/ipi.2019053>
27. Rucklidge, A.M. Chaos in models of double convection. Journal of Fluid Mechanics. 1992. №237. С. 209-229. <https://doi.org/10.1017/S0022112092003392>