

ТИМЧИШИН Богдан

Західноукраїнський національний університет

<https://orcid.org/0009-0008-0920-9122>

e-mail: tymchyshyn.bohdan@gmail.com

МАНЖУЛА Володимир

Західноукраїнський національний університет

<https://orcid.org/0000-0001-5222-8443>

e-mail: v.manzhula@wunu.edu.ua

МАТЕМАТИЧНЕ ТА АЛГОРИТМІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛІЗОВАНОЇ ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ПРОАКТИВНОГО УПРАВЛІННЯ ЕКОСИСТЕМОЮ МІСТА

У статті розглядається математичне та алгоритмічне забезпечення інтелектуалізованої системи для сценарного аналізу в межах проактивного управління екосистемою міста. Формалізовано задачу оптимізації розміщення джерел техногенного навантаження (зокрема, котельні та когенераційних установок) в умовах щільної міської забудови, яка NP-складною задачею дискретної комбінаторної оптимізації. Особливістю підходу є використання регуляторної моделі атмосферної дисперсії AERMOD у якості «чорної скриньки» для обчислення цільової функції, модифікованої методом штрафних функцій для гарантування дотримання санітарних норм. Для пошуку рішень адаптовано метаевристичні алгоритми (генетичний алгоритм, дискретний метод рою часток, дискретний алгоритм бджолиної колонії) шляхом розробки уніфікованих дискретних операторів. Запропоновано метод інтелектуалізованого вибору стратегії оптимізації, який на основі порогів складності та масштабу автоматично обирає найбільш ефективний алгоритм (від повного перебору до D-ABC). Проведено практичну апробацію методу на прикладі розміщення об'єктів теплогенерації у м. Тернопіль. Розроблена система дозволяє трансформувати складні фізичні моделі у практичний інженерний інструмент, забезпечуючи баланс між точністю прогнозів та часом обчислень для оперативного та стратегічного планування розвитку та відновлення інфраструктури міст.

Ключові слова: проактивне управління, екосистема міста, екологічне моделювання, AERMOD, комбінаторна оптимізація, метаевристичні алгоритми, DEAP, сценарний аналіз, інтелектуалізована програмна система.

TYMCHYSHYN Bohdan, MANZHULA Volodymyr

West Ukrainian National University

MATHEMATICAL AND ALGORITHMIC TOOLS FOR AN INTELLECTUALIZED SOFTWARE SYSTEM FOR PROACTIVE CITY ECOSYSTEM MANAGEMENT

The article presents a mathematical and algorithmic framework for an intellectualized software system designed to support proactive management of urban ecosystems through scenario-based optimization. The study formalizes the problem of placing technogenic emission sources—such as boiler houses and cogeneration units—within dense urban development as an NP-hard discrete combinatorial optimization task. The approach employs the regulatory atmospheric dispersion model AERMOD as a "black box" to compute the objective function, which is enhanced by a penalty-based constraint-handling mechanism to ensure adherence to sanitary concentration limits.

To efficiently explore the discrete search space, the authors adapt three metaheuristic algorithms—Genetic Algorithm, Discrete Particle Swarm Optimization, and Discrete Artificial Bee Colony—using a system of unified discrete operators that strictly preserve the cardinality and feasibility of candidate solutions. Furthermore, the paper introduces an intelligent strategy-selection method that automatically chooses the optimal optimization algorithm based on task complexity and scale, ranging from exhaustive search for small instances to D-PSO and D-ABC for medium- and large-scale scenarios.

The proposed methodology is validated through a practical case study on optimizing the placement of heat-generation facilities in Ternopil, Ukraine. Results demonstrate that the system effectively balances forecast accuracy and computational cost, transforming complex atmospheric dispersion simulations into a practical decision-support tool for urban planning. The developed framework establishes a foundation for scalable, data-driven environmental management systems aimed at enhancing the resilience and sustainability of modern cities.

Keywords: proactive management, city ecosystem, environmental modeling, AERMOD, combinatorial optimization, metaheuristic algorithms, DEAP, scenario analysis, intellectualized software system.

Стаття надійшла до редакції / Received 30.09.2025

Прийнята до друку / Accepted 02.11.2025

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Сучасний розвиток урбанізованих територій характеризується стрімким зростанням енергоспоживання та ущільнення інфраструктури, що неминуче призводить до загострення екологічних проблем. В умовах децентралізації енергетики, яка передбачає впровадження розподіленої генерації (зокрема, когенераційних установок малої та середньої потужності), критично важливим стає питання вибору оптимальних локацій для розміщення нових об'єктів техногенного навантаження [1, 2, 3].

Традиційні підходи до управління екологічною безпекою міста здебільшого мають реактивний характер. Вони базуються на системах моніторингу, які фіксують перевищення гранично допустимих концентрацій (ГДК) забруднюючих речовин вже за фактом їх виникнення. Такий підхід («post-factum») дозволяє лише констатувати погіршення стану довкілля, але не надає інструментів для його попередження на етапі планування. Більше того, існуючі методи проектування часто спираються на спрощені геометричні обмеження (санітарно-захисні зони фіксованого радіусу) або інтуїтивні рішення, ігноруючи складну фізику розсіювання викидів, вплив метеорологічних умов, рельєфу місцевості та ефект суперпозиції полів від багатьох джерел. Це призводить до прийняття субоптимальних управлінських рішень, які в довгостроковій перспективі створюють ризики для здоров'я населення [4, 5, 6].

Вирішення зазначеної проблеми вимагає зміни парадигми управління: переходу від реактивного реагування до проактивного управління, яке базується на прогнозуванні та попередженні ризиків. Реалізація такого підходу неможлива без розробки інтелектуалізованих систем підтримки прийняття рішень (СППР), здатних інтегрувати та обробляти великі масиви різномірних даних: просторових даних про міську забудову, параметрів джерел викидів, метеорологічної інформації та нормативних обмежень [7, 8, 9].

Ключовим елементом таких систем має стати сценарний аналіз, що поєднує суворе математичне моделювання фізичних процесів (наприклад, з використанням регуляторних моделей типу AERMOD) та методи комбінаторної оптимізації. Задача пошуку оптимальної конфігурації мережі джерел в умовах жорстких екологічних обмежень зводиться до класу NP-складних задач оптимізації «чорної скриньки» з високою обчислювальною вартістю. Це зумовлює необхідність розробки адаптивного алгоритмічного забезпечення, яке б дозволяло автоматично обирати стратегію пошуку рішень залежно від складності сценарію, забезпечуючи баланс між точністю та часом отримання результату [10, 11, 12].

Таким чином, розробка математичного та алгоритмічного забезпечення для інтелектуалізованої системи підтримки проактивного управління екосистемою міста є актуальним науково-прикладним завданням, вирішення якого дозволить трансформувати теоретично складні моделі у практичний інструмент для стратегічного планування сталого розвитку міста.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Проблема розміщення об'єктів техногенного навантаження традиційно розглядається в науковій літературі в кількох площинах. Значний пласт досліджень, представлений у працях І.А. Чуб, М.В. Новожилової, В.А. Андронova та інших, фокусується на вирішенні задач геометричного проектування, таких як пакування або розкрий [13, 14]. У цих роботах головна увага приділяється аналітичному опису обмежень взаємного неперетину об'єктів (наприклад, за допомогою апарату φ -функцій). Однак, специфіка екологічних задач вимагає переходу від геометричних моделей до моделей фізичних полів, де вплив джерела не є локальним, а поширюється на всю область у вигляді суперпозиції концентрацій [15]. У контексті моделювання розповсюдження забруднень загальноновизнаним світовим стандартом є використання регуляторних моделей атмосферної дисперсії, таких як AERMOD [16]. Проте в існуючій практиці ці інструменти використовуються переважно для задач оцінки – побудови карт забруднення або перевірки відповідності нормативам вже спроектованих об'єктів. Такий підхід вимагає розрахунку концентрацій у тисячах точок розрахункової сітки, що є надзвичайно ресурсомісною операцією [17] і ускладнює використання цих моделей в ітеративних оптимізаційних процедурах. Для вирішення задач оптимізації розміщення, які належать до класу NP-складних задач, широко застосовуються метаевристичні алгоритми: генетичні алгоритми (GA) [18, 19], метод рою часток (PSO) [20, 21], алгоритм бджолиної колонії (ABC) [22, 23, 24]. Проте більшість класичних реалізацій цих алгоритмів орієнтовані на неперервні простори пошуку. Застосування неперервної оптимізації в умовах міської забудови часто призводить до отримання рішень, які є теоретично оптимальними, але практично нереалізованими (наприклад, розміщення об'єкта посеред існуючої будівлі або приватної території) [17].

Отже, незважаючи на значний доробок у сферах математичного моделювання та оптимізації, на сьогодні відсутній комплексний підхід, який би поєднував точність фізичних моделей типу AERMOD («чорна скринька») з ефективними методами дискретної комбінаторної оптимізації. Існуючі методи не враховують необхідність гарантованого вибору легальних локацій з фіксованої множини допустимих варіантів та не пропонують адаптивних механізмів вибору стратегії пошуку залежно від обчислювальної складності задач. Це обумовлює необхідність розробки інтелектуалізованої системи, яка б включала можливість реалізувати оптимізаційні сценарії проактивного управління екологічною безпекою в режимі прийнятного часу.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Метою роботи є розробка математичного та алгоритмічного забезпечення інтелектуалізованої системи для сценарного аналізу та оптимізації розміщення об'єктів розподіленої генерації в щільній міській забудові. Запропонований підхід дозволяє мінімізувати екологічні ризики на етапі планування, гарантуючи дотримання санітарних норм шляхом математичного моделювання поширення концентрацій та використання інтелектуалізованих методів пошуку оптимальних локацій розміщення джерел забруднення.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Математична постановка задачі комбінаторної оптимізації розміщення джерел забруднення.

Задача проактивного управління «знайти найкраще місце для k нових джерел» є задачею оптимізації розміщення. Слід відмітити характеристики цільової функції даної оптимізаційної задачі:

- на відміну від геометричних об'єктів, де вплив є локальним (об'єкт або перетинається, або ні), джерело забруднення створює поле, що поширюється на всю область. Вплив у будь-якій точці-рецепторі є суперпозицією (сумою) впливів від всіх існуючих фонових джерел та всіх k нових джерел;

- зв'язок між шуканим розв'язком, оптимальне розміщення, та результатом, значеннями концентрації в точках де розміщені рецептори, не описується простою аналітичною формулою (як відстань чи перетин). Він є результатом складного фізичного моделювання (атмосферна дифузія, метеорологія, рельєф), яке в нашому випадку інкапсульоване у зовнішньому обчислювальному модулі (AERMOD). Таким чином, цільова функція є обчислювально дорогою «чорною скринькою»;

- метою проактивного управління екологічною безпекою є не мінімізація середнього забруднення, а мінімізація максимального ризику. Ми повинні гарантувати, що навіть у точці розміщення рецептора з найбільшим значенням концентрації, вона не перевищить норму для модельованого забруднювача;

- на відміну від багатьох задач моделювання (напр., побудови карт для візуалізації), в даному випадку цільова функція не вимагає розрахунку повного, високороздільного поля концентрацій по всій території міста, що є надзвичайно дорогою операцією. Оцінка «якості» розв'язку здійснюється виключно у скінченній, зазвичай невеликій, множині цільових точок-рецепторів. Це дозволяє скоротити обчислювальну вартість кожного виклику обчислювального модуля AERMOD. Оскільки, розраховується концентрація лише в дискретних точках, а не в точках деякої сітки.

Ці особливості унеможливають застосування класичних градієнтних методів або методів, що базуються на аналітичному описі обмежень. Натомість, вони вимагають формулювання задачі як дискретної (комбінаторної) оптимізації «чорної скриньки» та застосування для її вирішення відповідних методів, зокрема, повного перебору або метаверстик [25, 26, 27].

Формалізуємо її таким чином. Нехай визначено наступні скінченні множини та константи:

$D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ – множина m дискретних, допустимих локацій для розміщення нових об'єктів;

k – ціле число, що позначає кількість нових джерел, які необхідно розмістити ($k \leq m$);

$R = \{r_1, r_2, \dots, r_q\}$ – множина q цільових точок-рецепторів, в яких проводиться контроль впливу;

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ – множина s забруднюючих речовин, що контролюються;

ΓDK_p – значення гранично допустимої концентрації ($\Gamma DK_p > 0$) для забруднюючої речовини $p \in P$;

$C_{r,p}^{base}$ – значення фонові концентрації речовини p в точці розміщення рецептора r , створене всіма існуючими (не оптимізованими) джерелами.

Рішенням X є підмножина з k елементів, обраних з множини D :

$$X \subseteq D, |X| = k. \quad (1)$$

Простором пошуку S_D є множина всіх таких рішень:

$$S_D = \{X \mid X \subseteq D \wedge |X| = k\}. \quad (2)$$

Загальна кількість можливих рішень (розмірність простору пошуку) дорівнює

$$|S_D| = C_m^k = \frac{m!}{(k! \cdot (m-k)!)}, \quad (3)$$

що визначає обчислювальну складність задачі.

Цільова функція $f_{obj}(X)$ відображає будь-яке можливе рішення $X \in S_D$ у кількісну оцінку варіанту розміщення, яку необхідно мінімізувати. Значення цієї функції обчислюється через виклик обчислювального модуля (AERMOD) $f_{obj}: S_D \rightarrow \mathbb{R}$.

Позначимо, $C_{r,p}^X$ – додаткова концентрація речовини p в точці розміщення рецептора r , обумовлена k новими джерелами, розміщеними в локаціях X .

Загальна концентрація $C_{r,p}(X)$ в точці розміщення рецептора r для речовини p при рішенні X є лінійною суперпозицією фонові концентрації та додаткового впливу на основі концентрації нового джерела:

$$C_{r,p}(X) = C_{r,p}^{base} + C_{r,p}^X. \quad (4)$$

Задача оптимізації розміщення полягає у знаходженні такого рішення X^* з простору S_D , яке мінімізує значення цільової функції $f_{obj}(X)$:

$$X^* = \arg \min_{X \in S_D} f_{obj}(X) \quad (5)$$

$$C_{r,p}(X) \leq \Gamma DK_p, \forall r \in R. \quad (6)$$

Використовуючи нормалізований індекс якості, запишемо цільову функцію f_{obj} за мінімаксним критерієм – як найгірше (максимальне) відхилення від ΓDK_p серед усіх цільових рецепторів для контрольованої речовини:

$$f_{obj}(X) = \max_{r \in R} \left\{ \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} - 1 \right\}. \quad (7)$$

Підставивши $f_{obj}(X)$ у задачу (9), отримуємо математичну постановку задачі:

$$X^* = \arg \min_{X \in S_D} \max_{r \in R} \left\{ \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} - 1 \right\} \quad (8)$$

$$C_{r,p}(X) \leq \Gamma DK_p, \forall r \in R. \quad (9)$$

Для метаевристичних алгоритмів (GA, ABC, PSO), найкращим способом врахувати обмеження є модифікація цільової функції методом штрафних функцій [19]. Це дозволить алгоритму уникати рішення, які перевищують ГДК і є неприпустимими, навіть якщо вони математично мінімальні. Ми змінюємо функцію f_{obj} так, щоб вона складалася з двох частин: власне мінімізації забруднення та штрафу за порушення санітарних норм:

$$f_{obj}(X) = f_{risk}(X) + P(X), \quad (10)$$

де, $f_{risk}(X)$ – складова мінімізації ризику на основі індексу якості:

$$f_{risk}(X) = \max_{r \in R} \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p}; \quad (11)$$

$P(X)$ – штрафна функція за порушення обмежень:

$$P(X) = \mu \cdot \sum_{r=1}^R \max \left(0, \max_{r \in R} \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} - 1 \right)^2, \quad (12)$$

де, μ – великий штрафний коефіцієнт (наприклад, 10^4).

Функція $\max \left(0, \max_{r \in R} \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} - 1 \right)^2$ гарантує, що штраф нараховується тільки якщо концентрація перевищує ГДК_p. Якщо концентрація менша за ГДК_p, доданок дорівнює 0.

Запишемо задачу оптимізації із врахуванням вище наведених міркувань:

$$X^* = \arg \min_{X \in S_D} \left[\max_{r \in R} \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} + \mu \cdot \sum_{r=1}^R \max \left(0, \max_{r \in R} \frac{C_{r,p}(X)}{\Gamma DK_p} - 1 \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Запропонована математична постановка задачі оптимізації, яка базується на дискретному представленні простору пошуку S_D та обмежених множині рецепторів R , має низку суттєвих переваг порівняно з класичними неперервними підходами до моделювання полів концентрацій. Ці переваги стосуються як обчислювальної ефективності, так і практичної придатності для систем підтримки прийняття рішень.

Таким чином, запропонований у роботі підхід є гібридним. Він використовує достовірність сертифікованого модуля AERMOD, але, на відміну від стандартної практики, вбудовує його як «чорну скриньку» в оптимізаційний метод. А на відміну від відомих неперервних оптимізаційних моделей, постановка задачі є дискретною (комбінаторною), що вимагає застосування адаптованих метаевристичних алгоритмів (GA, Discrete ABC, Discrete PSO) та робить задачу практично розв'язуваною завдяки обчислювальній сфокусованості (розрахунок значень цільової функції лише в точках розміщення рецепторів).

Адаптація методів оптимізації на основі уніфікованих операторів метаевристичних алгоритмів для задачі дискретної оптимізації. Вирішення сформульованої NP-складної задачі комбінаторної оптимізації (вибір k найкращих локацій з m доступних) в умовах високої обчислювальної вартості цільової функції вимагає застосування ефективних метаевристичних алгоритмів.

Для розроблення та дослідження ефективності їх застосування було обрано фреймворк DEAP (Distributed Evolutionary Algorithms in Python) [28]. DEAP виступає не лише засобом реалізації, а й ефективним середовищем для порівняльного аналізу ефективності різних метаевристичних стратегій у контексті задач оптимізації. Вибір DEAP як технологічної основи зумовлений необхідністю вирішення двох специфічних проблем:

- по-перше, задача вимагає пошуку підмножини фіксованого розміру k . Більшість стандартних бібліотек оптимізації (напр., `scipy.optimize`, `pyswarms`) орієнтовані на неперервні або прості бінарні простори і не підтримують обмеження на кардинальність множини ($|X| = k$). DEAP є не просто бібліотекою алгоритмів, а гнучким фреймворком, що дозволяє довільно визначати структуру «особини» (наприклад, як перестановку індексів або множини) та розробляти користувацькі оператори мутації та схрещування, специфічні для даної предметної області.

- по-друге, оскільки обчислення цільової функції (13) передбачає запуск зовнішнього модуля AERMOD (час виконання, якого може коливатися в середньому в діапазоні 2-6 с), послідовне виконання алгоритму робить його непридатним для інтерактивного використання. DEAP архітектурно спроектований для розподілених обчислень. Він дозволяє тривіально замінити стандартний оператор `map` на його паралельну версію (на основі `multiprocessing`), що забезпечує лінійне прискорення розрахунків пропорційно кількості ядер процесора без зміни логіки самого алгоритму.

Класичні метаевристичні алгоритми, такі як метод рою часток (PSO) та алгоритм бджолиної колонії (ABC), були розроблені для неперервних просторів, де поняття «швидкості» та «координат» мають чіткий геометричний зміст. Їхнє застосування до нашої дискретної комбінаторної задачі вимагає адаптації. Існуючі

«бінарні» версії цих алгоритмів (BPSO, BABC) працюють з бінарними векторами довільної ваги, що не гарантує дотримання обмеження на кількість обраних джерел, k . Щоб уникнути використання складних механізмів «штрафів» або «ремонтів» не валідних рішень, у даній роботі запропоновано підхід на основі уніфікованих дискретних операторів. Ці оператори перевизначають поняття «груху» у дискретному просторі рішень, дозволяючи реалізувати логіку різних метаевристик (GA, PSO, ABC) в єдиній термінології.

Формалізуємо позначення простору та операторів. Нехай, $D_{locations} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ – множина всіх доступних локацій. Рішення (позиція) v визначається як підмножина $v \subseteq D_{locations}$, така що $|v| = k$.

Для адаптації базових версій алгоритмів розробимо три базові оператори:

1. Create_Random_Solution() – оператор ініціалізації, який забезпечує глобальне дослідження (exploration) та буде використовуватися для генерування початкової популяції та в фазі «бджіл-розвідників» для алгоритму D-ABC. Даний оператор повертає випадкову вибірку k унікальних елементів з множини $D_{locations}$ (рис. 1.а).

2. Random_Swap() – оператор випадкової заміни, який реалізує ненапрямлений локальний пошук або мутацію та створює «сусіда» для поточного рішення. Даний оператор вибирає компонент, що видаляється, випадковий елемент $d_{out} \in v$ та компонент, що додається, як випадковий елемент: $d_{in} \in D_{locations} \setminus v$. Далі формується нове рішення: $v_{new} \leftarrow (v \setminus d_{out}) \cup d_{in}$ (рис. 1.б). Використовується як оператор мутації в GA та як основний механізм пошуку для «робочих бджіл» в D-ABC.

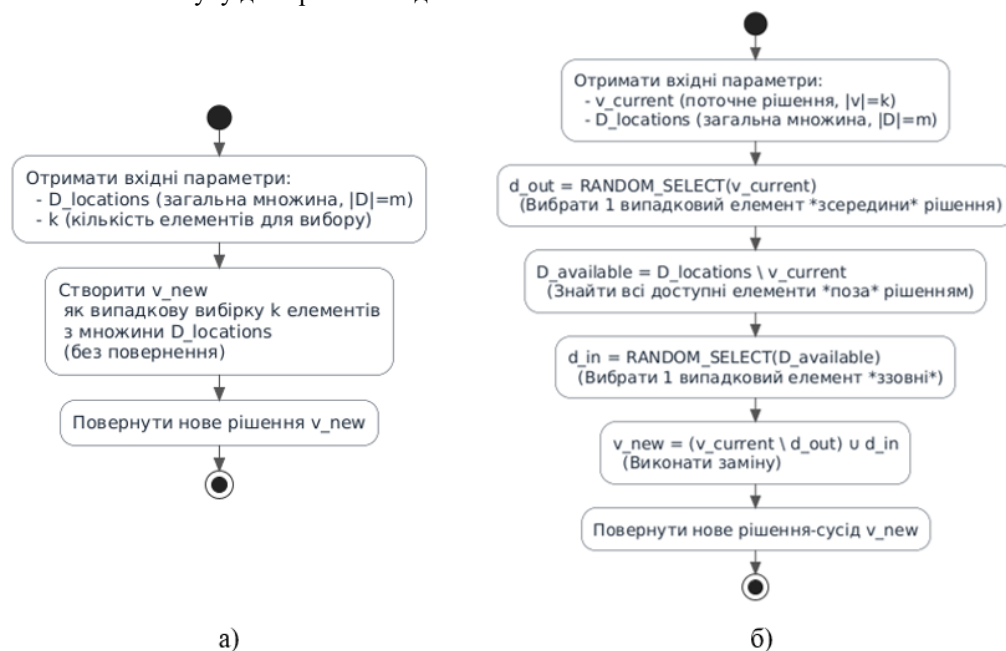


Рис. 1. Діаграма активності для операторів: а) Create_Random_Solution(), б) Random_Swap()

3. Targeted_Swap() – оператор напрямленої заміни, який реалізує напрямлений рух до кращого рішення, що є аналогом вектора швидкості в PSO. Оператор визначає різницю між поточним рішенням $v_{current}$ та цільовим v_{target} , формуючи множини зайвих елементів $Diff_{out} = v_{current} \setminus v_{target}$ та множину відсутніх елементів $Diff_{in} = v_{target} \setminus v_{current}$ (рис. 2). Якщо множини ідентичні, рух не виконується. У випадку не співпадіння вибираються $d_{out} \in Diff_{out}$ та $d_{in} \in Diff_{in}$ та формується нове рішення: $v_{new} \leftarrow (v_{current} \setminus d_{out}) \cup d_{in}$. Даний оператор дозволяє адаптувати алгоритм PSO, імітуючи «притягування» частки до персонального (p_{best}) та глобального (g_{best}) кращих рішень шляхом поступової заміни відмінних елементів.

Отже, розробка запропонованих операторів дозволяє уніфікувати програмну реалізацію різних метаевристик у середовищі DEAP, забезпечуючи при цьому суворе дотримання обмежень задачі (кардинальність множини k) на кожному кроці алгоритму без необхідності додаткових перевірок (рис. 3).

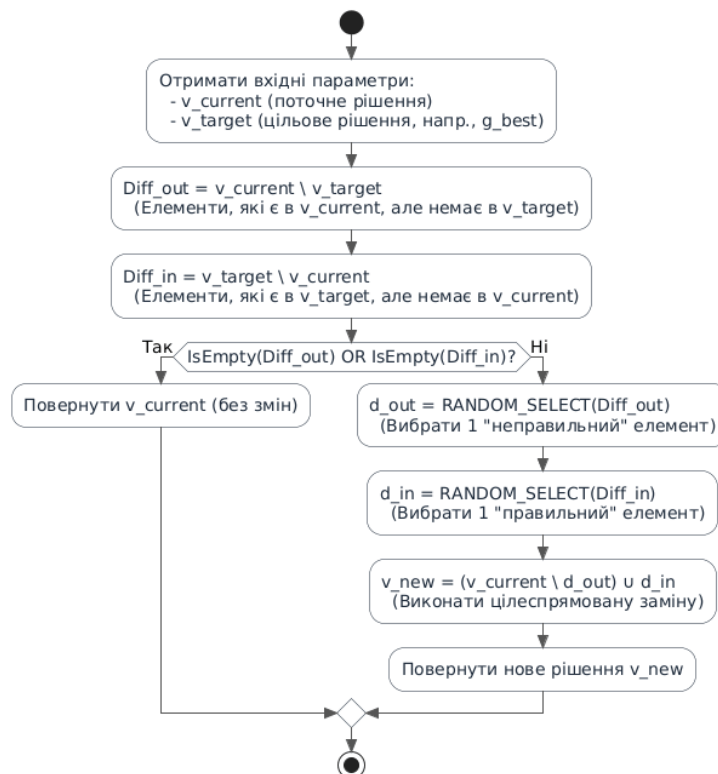


Рис. 2. Діаграма активності для оператора Targeted_Swap()

Робота GA базується на еволюційних принципах (рис. 4). Оператор схрещування комбінує частини двох успішних батьківських рішень, сподіваючись отримати ще кращого нащадка. Оператор мутації (Random_Swap()) вносить випадкові зміни для підтримки різноманітності. GA не має механізму прямого «руху до цілі». Він покладається на стохастичний відбір кращих особин з покоління в покоління, що є повільнішим процесом, ніж цілеспрямований рух часток у PSO. Глобальний пошук забезпечується виключно оператором мутації. Якщо мутація занадто слабка, популяція може виродитися; якщо занадто сильна – алгоритм перетворюється на випадковий пошук. GA менш схильний до застрягання, ніж PSO, але при складних ландшафтах вся популяція може прийти в один локальний оптимум.

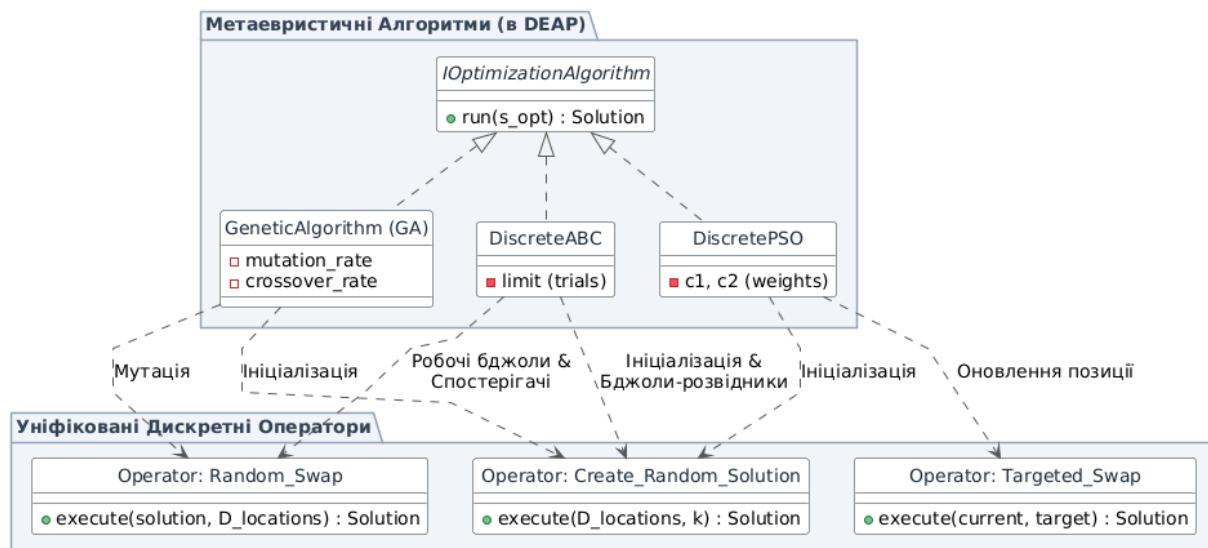


Рис. 3. Використання уніфікованих операторів в архітектурі DEAP

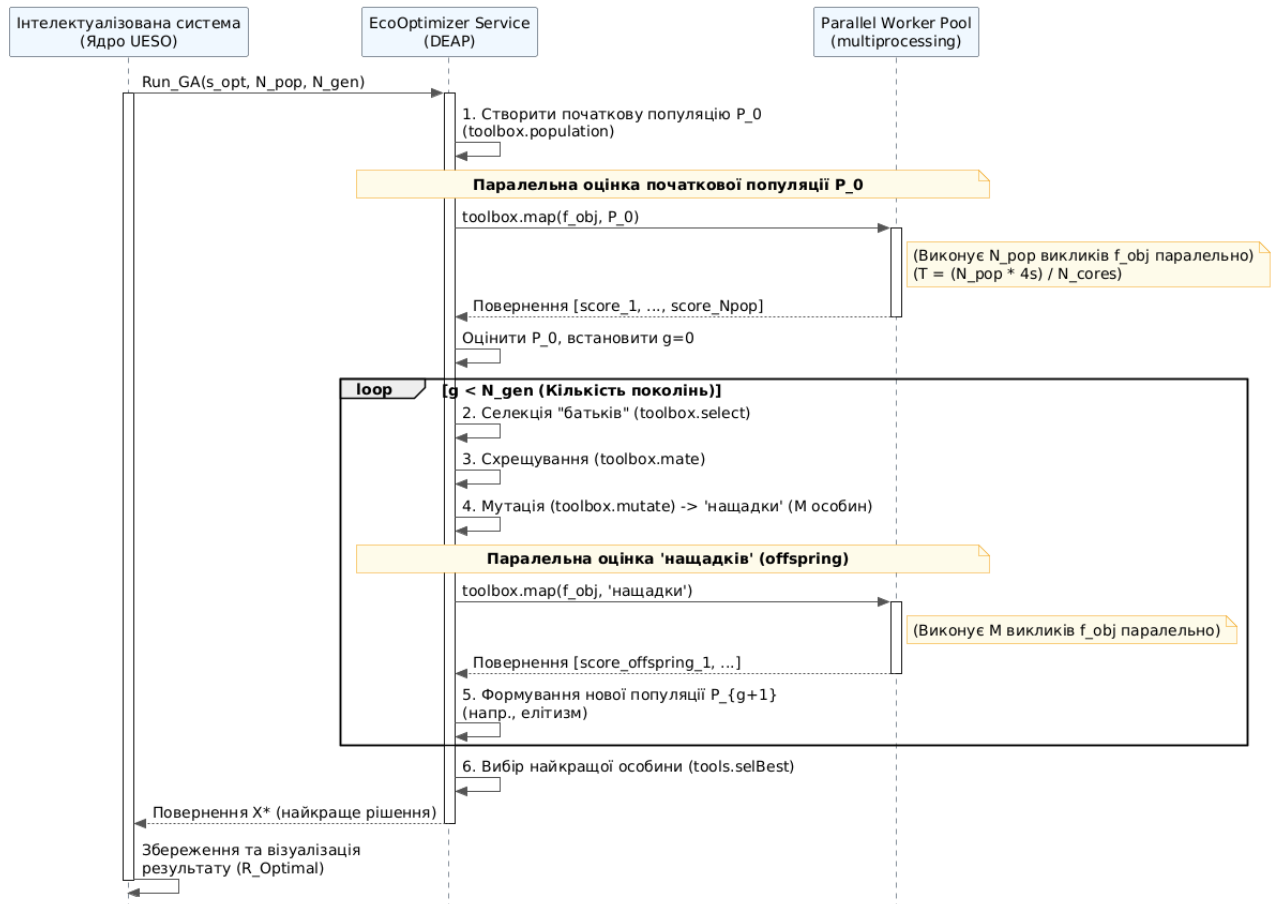


Рис. 4. Діаграма послідовності роботи адаптованого GA з механізмом паралелізації обчислень в DEAP

D-PSO – це алгоритм «соціальної поведінки». Кожна частка має «пам'ять» про свій найкращий результат (p_{best}) і знає про найкращий результат усього рою (g_{best}). Оператор Targeted_Swap() змушує частку активно змінювати свою позицію, щоб стати схожою на лідерів. Це імітує «вектор швидкості».

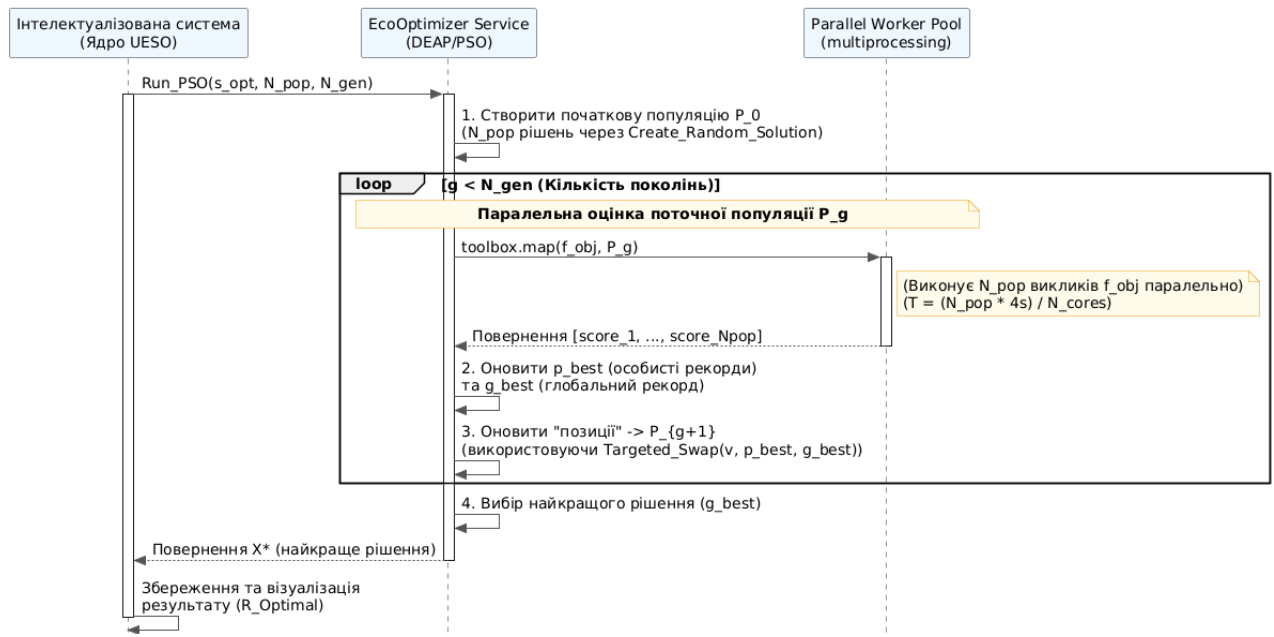


Рис. 5. Діаграма послідовності роботи дискретного PSO з механізмом паралелізації обчислень в DEAP

Швидкість збіжності найсильніша сторона D-PSO. Завдяки механізму притягання, весь рій дуже швидко рухається в зону найкращого знайденого рішення. При цьому D-PSO майже не має механізмів для

дослідження нових областей, коли рій вже згрупувався. Якщо g_{best} (глобальний лідер) потрапив у локальний оптимум, то алгоритм зупиниться в субоптимальному рішенні.

Унікальність D-ABC полягає в розділенні ролей. «Робочі бджоли» займаються локальним покращенням відомих рішень (Random_Swap()). «Розвідники» відповідають за глобальний пошук. Якщо рішення не покращується певний час (LIMIT), воно викидається, і на його місце генерується абсолютно нове, випадкове рішення (Create_Random()). Через постійне введення нових випадкових рішень (розвідниками), середня якість популяції зростає повільніше, ніж у D-PSO.

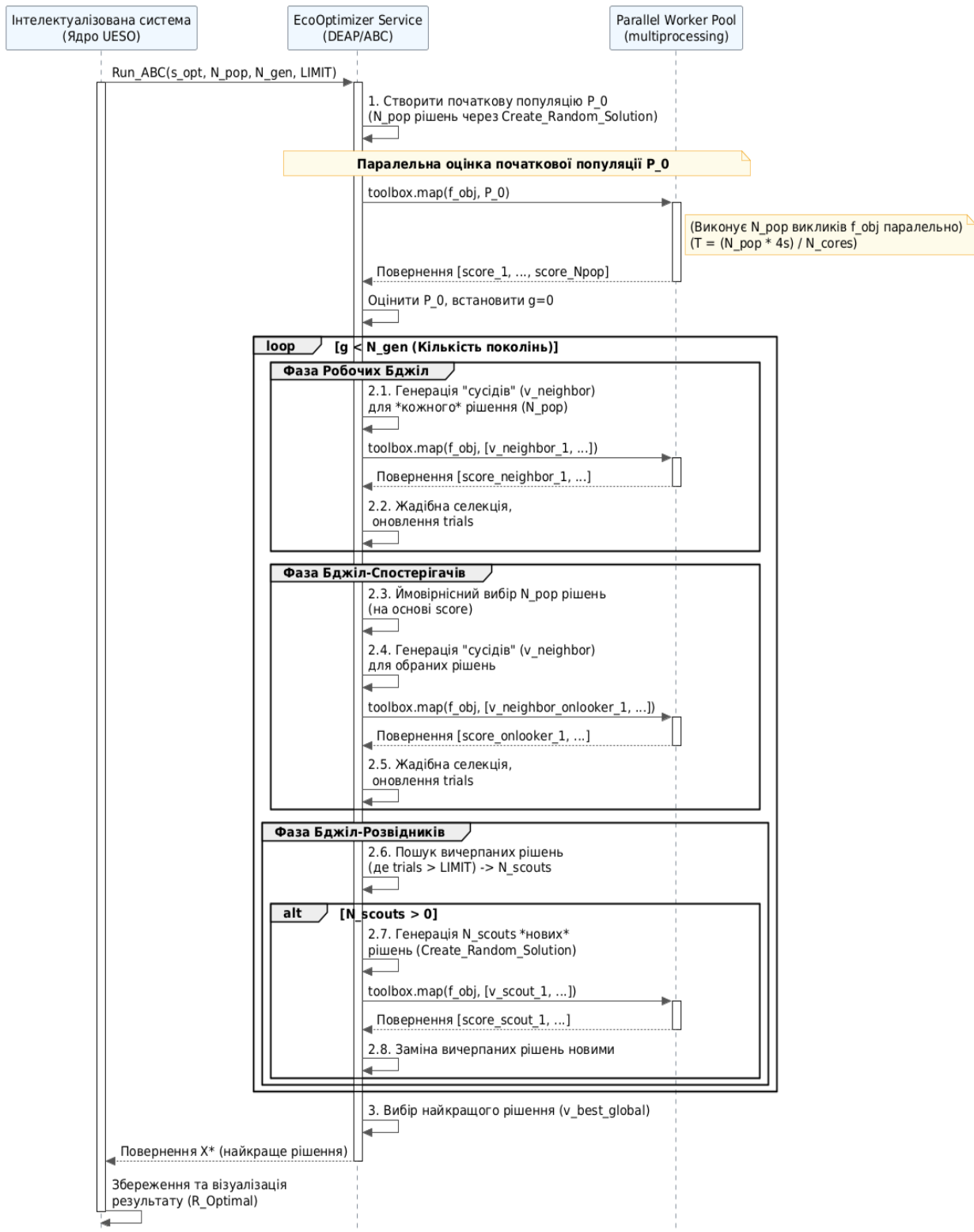


Рис. 6. Діаграма послідовності роботи дискретного PSO з механізмом паралелізації обчислень в DEAP

Механізм «розвідників» гарантує, що алгоритм ніколи не припиняє шукати нові області, навіть якщо основна частина популяції вже знайшла рішення. Це робить його найбільш надійним (робастним) для складних, багатомодальних задач високої розмірності.

Ключовою перевагою використання DEAP є можливість розпаралелювання популяційних алгоритмів. При використанні 8-ядерного Parallel Worker Pool ($N_{cores} = 8$) час виконання одного покоління (напр., $N_{pop} = 50$) скорочується з $T = 50 * 4 = 200$ с до $T_p = \frac{50}{8} * 4 = 28$ с (прискорення ~ 7.1 x).

Метод інтелектуалізованого вибору стратегії оптимізації залежно від складності оптимізаційної задачі. Обґрунтування необхідності інтелектуалізованого вибору стратегії оптимізації базується на аналізі трьох ключових факторів: NP-складності задачі, високій обчислювальній складності цільової функції та різній ефективності алгоритмів у різних просторах пошуку.

По-перше, експоненційне зростання простору пошуку. Як вже зазначалося, задача розміщення k джерел серед m локацій належить до класу NP-складних задач комбінаторної оптимізації. Розмір простору пошуку S_D визначається біноміальним коефіцієнтом, який зростає факторіально. При невеликих розмірностях (наприклад, $m = 10, k = 5$) простір пошуку складає лише 252 варіанти. Тут застосування складних метаевристик є надлишковим, повний перебір гарантує ідеальний результат за прийнятний час, 2.1 хв. (табл. 1). При збільшенні параметрів до $m = 30, k = 15$, кількість варіантів сягає $1.55 \cdot 10^8$. Повний перебір стає фізично неможливим, що вимагає переходу до наближених методів (метаевристик). Отже, один і той самий метод (наприклад, повний перебір) не може бути застосований для всіх сценаріїв через «комбінаторний вибух».

Таблиця 1.

Результати дослідження ефективності алгоритмів

№	Доступні локації, m	Джерела, k	Розмірність задачі, C	Обраний алгоритм	Час, хв
1	10	5	252	Exhaustive	2.1
2	14	5	2,002	Exhaustive	6.5
3	16	6	8,008	D-PSO	12.4
4	18	6	18,564	D-PSO	23.4
5	22	8	319,770	D-ABC	48.2
6	30	15	1.55×10^8	D-ABC	98.0

По-друге, критична обчислювальна складність цільової функції («чорна скринька»). На відміну від класичних задач, функція f_{obj} є «чорною скринькою» (виклик модуля AERMOD). Середній час одного розрахунку може складати близько 3-4 секунд. Це робить «вартість» кожної ітерації надзвичайно високою. Інтелектуалізований вибір алгоритму дозволяє мінімізувати кількість звернень до AERMOD, обираючи стратегію, яка збігається найшвидше для конкретного розміру задачі (13).

Проведені дослідження (рис. 7) показали, що жодна метаевристика не є універсальною: D-PSO забезпечує високу швидкість збіжності завдяки наведеному руху, проте має високий ризик зупинки в локальних оптимумах, особливо на складних ландшафтах («передчасна збіжність»). Він ефективний для задач середньої складності, де важлива швидкість. В свою чергу D-ABC є більш повільним, але значно надійнішим (робастним) завдяки механізму «бджіл-розвідників», які постійно досліджують нові області та не дають алгоритму зациклитися. Це єдиний вибір для задач високої складності (стратегічного рівня), де точність важливіша за час.

Представимо логіки вибору алгоритму оптимізації у вигляді кортежної структури $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} = \langle S, A, C, P, \Phi \rangle, \quad (14)$$

де, S – простір пошуку рішень: $S = \{ \langle m, k \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq k \leq m \}$, де, m – кількість доступних локацій (ueso:Locations), k – кількість джерел, розміщення яких оптимізується (ueso:Sources);

A – множина алгоритмів:

$$A = \{ a_{ES}, a_{DPSO}, a_{DABC} \}, \quad (15)$$

де, a_{ES} – алгоритм, що реалізує повний перебір (Exhaustive Search); a_{DPSO} – алгоритм, що реалізує евристику на основі дискретної версії рою частинок для сценаріїв тактичного значення (середня складність); a_{DABC} – алгоритм, що реалізує евристику на основі дискретної версії бджолоїної колонії для сценаріїв стратегічного значення (висока складність);

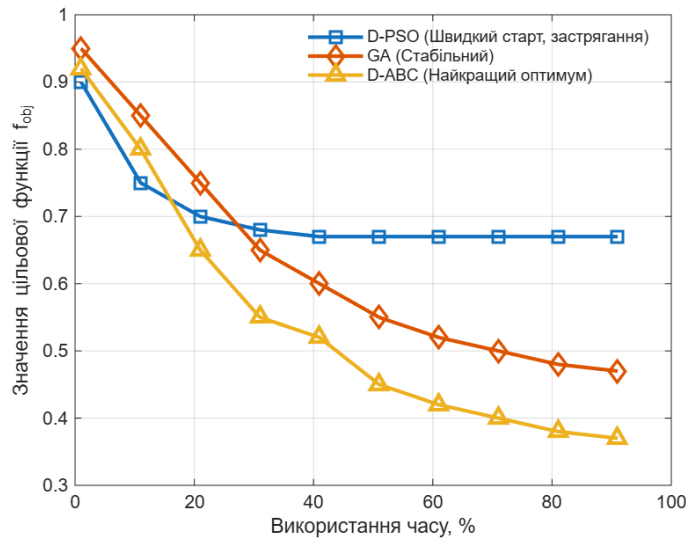


Рис. 7. Аналіз збіжності алгоритмів

C – множина констант:

$$C = \{\tau_{comp}, \tau_{scale}\}, \quad (16)$$

де, $\tau_{comp} = 4000$ – поріг складності; $\tau_{scale} = 20$ – поріг масштабу;

P – множина предикатів:

$$p_{triv}(s): C(m, k) < \tau_{comp} \vee k = 1, \quad (17)$$

$$p_{tact}(s): m < \tau_{scale}, \quad (18)$$

$$p_{strat}(s): m \geq \tau_{scale}; \quad (19)$$

Φ – функціональне відображення $\Phi: S \rightarrow A$, де,

$$\Phi(m, k) = \begin{cases} a_{ES}, & \text{якщо } p_{triv}(m, k) = 1, \\ a_{PSO}, & \text{якщо } \neg p_{triv} \wedge p_{tact}(m) = 1, \\ a_{ABC}, & \text{якщо } \neg p_{triv} \wedge p_{strat}(m) = 1. \end{cases} \quad (20)$$

Необхідність введення порогів масштабу τ_{scale} та складності τ_{comp} обумовлена потребою формалізувати процес прийняття рішень системою. Оскільки обчислення цільової функції є дорогим, система не може використовувати один універсальний метод. Ці пороги діють як «перемикачі» в логіці вибору алгоритму, балансуючи між часом виконання та гарантією знаходження оптимуму. Поріг складності τ_{comp} визначає межу між «тривіальними» задачами та задачами, що вимагають евристичного підходу. Задача класифікується як тривіальна p_{triv} . У цьому випадку простір пошуку настільки малий, що застосування метаевристик є недоцільним. Система обирає повний перебір a_{ES} . Поріг масштабу τ_{scale} використовується для диференціації NP-складних задач за рівнем складності «ландшафту» пошуку. Він розділяє задачі на тактичні та стратегічні. Коли задача стає занадто великою для повного перебору, система аналізує кількість доступних локацій m . При $m < 20$ простір пошуку є помірним (наприклад, ~18 тис. варіантів). PSO має високу швидкість збіжності і здатний знайти прийнятне рішення за 12-23 хвилини. Ризик зупинки в локальному мінімумі існує, але на таких розмірностях він виправданий швидкістю. Якщо $m \geq \tau_{scale}$, встановлюється стратегічний рівень $p_{strat}(m) = 1$ та використовується дискретний ABC, a_{ABC} .

Введення цих порогів дозволяє реалізувати функцію відображення $\Phi(m, k)$, яка автоматично адаптує обчислювальну стратегію.

Апробація методу адаптивного вибору стратегії оптимізації

Для апробації розробленого методу проведемо сценарний аналіз розміщення нових джерел забруднення – об'єктів теплогенерації, на прикладі м. Тернопіль. У 2023-2024 роках Тернопіль отримав партію нових когенераційних установок від USAID (Проект енергетичної безпеки). Це мобільні установки, які встановлюються на локальних котельнях (школи, лікарні, мікрорайони). Для експерименту «розміщення нових джерел» було взято усереднені характеристики цих нових блоків:

Тип: Міні-ТЕС контейнерного типу (часто на базі двигунів MAN або MWM, аналог Jenbacher J208).

Електрична потужність: ~50 – 500 кВт (різні модифікації). Для моделювання прийнято 330 кВт (середнє значення для локальних котельень).

У реальному міському плануванні когенераційні установки (КГУ) контейнерного типу можна встановлювати не лише на території діючих котельень, але й на інших комунальних майданчиках, де є доступ до інфраструктури (газ/електромережа): трансформаторні підстанції (ТП), території закладів освіти (госп. двір), комунальні/промислові майданчики: гаражні кооперативи, стоянки, пустирі поруч з теплотрасами.

Таблиця 2.

Вхідні дані про джерела для модуля AERMOD			
Параметр в AERMOD	Опис	Значення для JMS 312	Значення для USAID*
emission_rate	Потужність викиду	0.4 г/с	0.25 г/с
stack_height	Висота труби	12.0 м (мін. для міста)	8.0 м (моб. блок)
stack_diameter	Діаметр гирла	0.35 м	0.25 м
exit_velocity	Швидкість газів	22.0 м/с	18.0 м/с
exit_temperature	Температура газів	723 K (450°C)	723 K (450°C)

Множина локацій можливого розміщення $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{16}\}$ (табл. 3).

Таблиця 3.

Характеристики локацій можливого розміщення джерел				
ID	Адреса	Тип об'єкта	Координати	Обґрунтування
d1	вул. Київська, 3с	Котельня (Велика)	49.5621, 25.6285	Базова точка генерації
d2	вул. Л. Українки, 4	Котельня (Квартальна)	49.5605, 25.6350	Існуюча інфраструктура
d3	вул. 15 Квітня, 20А	ЦТП / Котельня	49.5682, 25.6321	Густонаселений район
d4	вул. Купчинського, 14	Лікарня №2 (Котельня)	49.5658, 25.6420	Критична інфраструктура
d5	вул. Корольова, 7	Промзона	49.5580, 25.6405	Мінімум скарг на шум
d6	вул. Симоненка, 5	ЦТП	49.5645, 25.6201	Спальний район
d7	вул. 15 Квітня, 6	Трансф. підстанція	49.5665, 25.6380	Доступ до електромережі
d8	вул. Київська, 11	Трансф. підстанція	49.5642, 25.6245	Внутрішній двір, є місце
d9	бул. П. Куліша, 1	Трансф. підстанція	49.5685, 25.6270	Поруч з висотками
d10	вул. В. Великого, 4	Школа №19 (Госп. двір)	49.5615, 25.6305	Велика територія
d11	вул. Л. Курбаса, 9	Спортмайданчик/Пустир	49.5635, 25.6335	Вільна зона біля "Сільпо"
d12	вул. Овочева, 11	Склади/Гаражі	49.5590, 25.6450	Віддалено від житла
d13	вул. Тарнавського, 22	Технічний коледж (Тиль)	49.5638, 25.6180	Освітній заклад, є місце
d14	вул. Морозенка, 5	Парковка ТРЦ	49.5690, 25.6240	Асфальтований майданчик
d15	вул. Стуса, 10	ЦТП (Старий)	49.5655, 25.6355	Потребує реконструкції
d16	вул. Байди Вишневецького	Гаражний кооператив	49.5575, 25.6290	Промзона в житловому масиві

До множини рецепторів включено об'єкти з високим пріоритетом захисту (школи, садочки) та точки щільної житлової забудови, які знаходяться в радіусі дії нових локацій (зокрема ТП та гаражів). Множина R містить 12 об'єктів $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{12}\}$ (табл. 4).

Таблиця 4.

Характеристики об'єктів-рецепторів				
ID	Адреса	Тип	Координати	Обґрунтування
r1	бул. П. Куліша, 9 (ЗОШ № 27)	Школа	49.5670, 25.6295	Центр масиву, поруч d9, d1
r2	вул. Київська, 6 (Дитсадок № 21)	Дит. садок	49.5630, 25.6260	Дуже близько до d1, d8
r3	вул. Купчинського, 14 (Лікарня №2)	Лікарня	49.5660, 25.6435	В зоні впливу d4, d3
r4	вул. Братів Бойчуків, 2 (ЗОШ № 19)	Школа	49.5610, 25.6310	В зоні d2, d10
r5	вул. 15 Квітня, 25 (Житло)	Висотна забудова	49.5695, 25.6340	Ризик від d3, d6
r6	вул. Тарнавського, 34 (Техколедж)	Навчальний	49.5640, 25.6150	В зоні d13
r7	вул. Корольова, 10 (Дитсадок № 35)	Дит. садок	49.5595, 25.6390	Критично: поруч промзона d5
r8	бул. Вишневецького, 8 (ЗОШ № 28)	Школа	49.5630, 25.6210	В зоні нових джерел d6, d16
r9	вул. Лесі Українки, 10 (Дитсадок № 14)	Дит. садок	49.5612, 25.6365	Щільна забудова біля d2
r10	просп. Злуки, 55 (Церква Петра)	Громад. місце	49.5668, 25.6330	Перехрестя потоків від d1, d3
r11	вул. Купчинського, 7 (ЗОШ № 26)	Школа	49.5675, 25.6460	Крайня східна точка d4
r12	вул. Симоненка, 2 (Житло)	Житло	49.5650, 25.6190	Західна межа району d6, d13

Віртуально встановлюємо установку типу Jenbacher JMS 312 (або аналог USAID 330 кВт). Забруднювачем є оксиди азоту (NO_x), оскільки для газових двигунів це єдиний викид, що може наблизитися до $\text{ГДК} = 0.2 \frac{\text{мг}}{\text{м}^3}$. Відповідно необхідно знайти $k = 3$ оптимальні точки для встановлення нових КГУ так, щоб не перекрити викидами забруднення житлові будинки (рецептори), де вже є високий фон від транспорту. Значення фонові концентрації NO_x в точці розміщення рецепторів, створене всіма існуючими (не оптимізованими) джерелами, наведено в табл. 5.

Таблиця 5.

Значення фонових концентрацій для рецепторів

ID	$C_{r,p}^{base}$ (мг/м ³)	% від ГДК	Обґрунтування
r1	0.06	30%	Спальний район, далеко від дороги
r2	0.08	40%	Близькість до вул. Київської
r3	0.05	25%	Паркова зона лікарні
r4	0.07	35%	Всередині кварталу
r5	0.14	70%	Критично! 6-смугова магістраль під вікнами
r6	0.09	45%	Інтенсивний трафік на підйомі
r7	0.11	55%	Вплив промислової зони та гаражів
r8	0.04	20%	Глибоко у дворах
r9	0.05	25%	Затишна зона
r10	0.13	65%	Перехрестя великих потоків транспорту
r11	0.03	15%	Окраїна міста, чисте повітря
r12	0.06	30%	Середня активність

Згідно з розробленою методикою інтелектуалізованого вибору стратегії (параграф 3.3), для даного експерименту система автоматично обрала алгоритм повного перебору (Exhaustive Search – a_{ES}).

На рис 8 зображено фрагмент карти мікрорайону «Сонячний»/«Східний» у м. Тернопіль (перетин просп. Злуки, вул. 15 Квітня та вул. Київської). Чорні точки – це всі 16 кандидатів доступних локацій (котельні, ЦТП, пустирі), які були розглянуті. Червоні зірки – це рецептори: чутливі об'єкти (школи №19, №27, №28, дитсадки, лікарня №2), де контролюється рівень забруднення. Зелені зірки – це три оптимальні локації, обрані алгоритмом для розміщення нових когенераційних установок (КГУ).

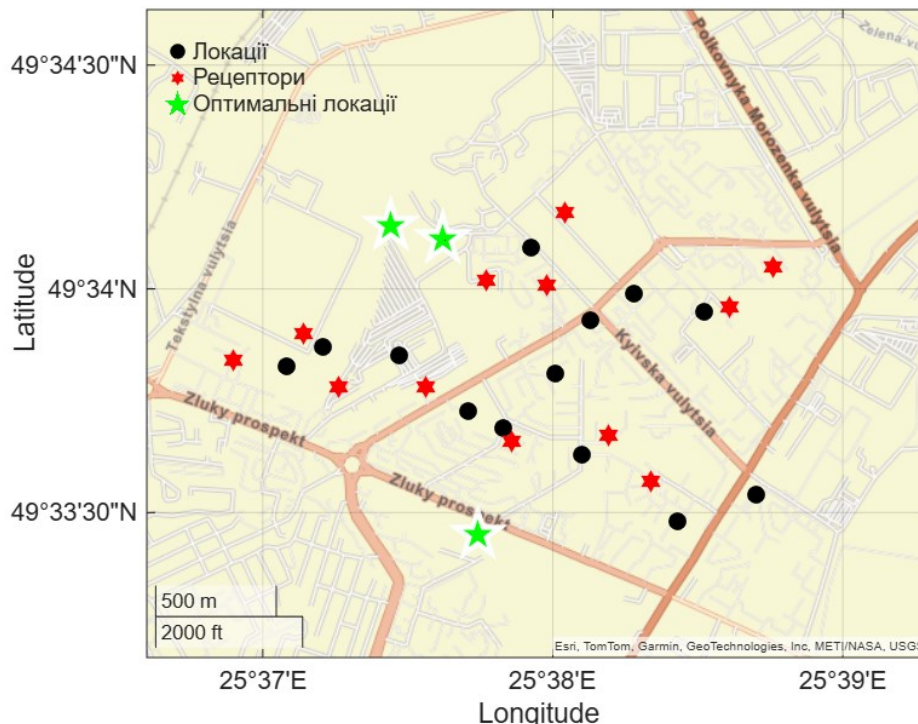


Рис. 8. Результати сценарного аналізу оптимального розміщення нових джерел

Алгоритм згрупував джерела генерації на західному фланзі району. Локація №1 (Верхня ліва) – район перетину вул. Текстильна та просп. Злуки. Це зона, наближена до промислових/комерційних об'єктів (наприклад, ТРЦ або склади). Локація №2 (Центральна ліва) – трохи східніше від першої, район парку Національного Відродження або прилеглих територій (пустир/спортмайданчик). Локація №3 (Нижня) – район вул. Симоненка/просп. Злуки. Рецептори сконцентровані в Центрі та на Сході (вздовж вул. Київської та 15 Квітня). Це зона щільної житлової забудови. Джерела винесені максимально на Захід. Алгоритм знайшов рішення, яке мінімізує вплив на найбільше скупчення людей, фізично віддаливши джерела від шкіл. Результат свідчить про те, що фонове забруднення в центрі (на вул. Київській) настільки високе, що не можливо розмістити там жодного джерела. Джерела необхідно розміщувати на відносно чистому заході і дозволити викидам розсіятися на відстані, ніж ставити їх у центрі, де навіть малий викид призведе до миттєвого перевищення ГДК. Обрані точки співпадають з зонами менш щільної забудови (паркові зони, широкі проспекти, початок промзони). Це дозволяє димовим газам краще розсіюватися завдяки відсутності ефекту «аеродинамічної тіні» від висотних будинків, що є характерним для вул. 15 Квітня. Отриманий результат

демонструє, що центральна частина району є екологічно перевантаженою. Розміщення нових потужностей на існуючих котельнях (вздовж вул. Київської) є недоцільним через ризик перевищення санітарних норм. Найбезпечнішим є створення «енергетичного вузла» на західному кордоні житлового масиву (вул. Текстильна/Симоненка), звідки теплоносій подаватиметься вглиб району. Метод успішно виконав розміщення на користь глобальної екологічної безпеки населення.

ВИСНОВКИ З ДОСЛІДЖЕННЯ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК

В статті формалізовано математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації розміщення джерел забруднення на території міста. На відміну від класичних геометричних задач пакування, запропонований підхід враховує суперпозицію полів концентрацій та використовує модель AERMOD як «чорну скриньку» для обчислення цільової функції. Для гарантування дотримання екологічних стандартів цільова функція модифікована методом штрафних функцій, що дозволяє мінімізувати максимальний ризик перевищення ГДК у точках-рецепторах. Перехід до дискретного простору пошуку дозволив уникнути проблем локальних мінімумів, характерних для неперервних ландшафтів, та забезпечити легальність пропонуваніх рішень.

Адаптовано метаевристичні алгоритми (генетичний алгоритм, дискретний метод рою часток, дискретний алгоритм бджолоїної колонії) для вирішення задач дискретної оптимізації фіксованої розмірності. Розроблено та реалізовано у фреймворку DEAP три уніфіковані оператори, що дозволило уніфікувати програмну реалізацію різних евристик та гарантувати валідність рішень (дотримання кардинальності множини) без необхідності використання механізмів коригування особин

Запропоновано метод інтелектуалізованого вибору стратегії оптимізації, який базується на аналізі складності задачі. Введення порогів складності та масштабу дозволяє системі автоматично перемикатися між повним перебором (для тривіальних задач), D-PSO (для задач тактичного рівня) та D-ABC (для стратегічних задач високої розмірності). Це забезпечує баланс між часом отримання рішення та гарантією його оптимальності в умовах високої обчислювальної складності моделі AERMOD. Також, проведено апробацію методу на прикладі розміщення трьох когенераційних установок у м. Тернопіль.

Розроблене математичне та алгоритмічне забезпечення, апробовані на задачі розміщення об'єктів розподіленої генерації, створюють універсальний фундамент для побудови комплексної системи управління екологічною безпекою міста, за рахунок масштабування системи для інтеграції транспортних потоків та великої промисловості.

References

1. Georgilakis, P. S., & Hatziairgiyriou, N. D. (2013). Optimal distributed generation placement in power distribution networks: Models, methods, and future research. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(3), 3420–3428. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2237043>
2. Weber, C., & Shah, N. (2011). Optimization of district energy systems design and operation. *Computers & Chemical Engineering*, 35(6), 1214–1237. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2011.01.030>
3. Mehleri, E. D., Sarimveis, H., Markatos, N. C., & Papageorgiou, L. G. (2012). Optimal design and operation of distributed energy systems: Application to Greek residential sector. *Renewable Energy*, 51, 331–342. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2012.09.009>
4. Fuller, R., Landrigan, P. J., Balakrishnan, K., Bathian, G., Bose-O'Reilly, S., Brauer, M., ... & Yamashita, C. (2022). Pollution and health: a progress update. *The Lancet Planetary Health*, 6(6), e535–e547. [https://doi.org/10.1016/S2542-5196\(22\)00090-0](https://doi.org/10.1016/S2542-5196(22)00090-0)
5. Kumar, P., Morawska, L., Martani, C., Biskos, G., Neophytou, M., Di Sabatino, S., ... & Britter, R. (2015). The rise of low-cost sensing for managing air pollution in cities. *Environment International*, 75, 199–205. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2014.11.019>
6. Zou, B., Zhan, F. B., Wilson, J. G., & Zeng, Y. (2010). Performance of AERMOD at different time scales. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 18(5), 612–623. <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2010.01.005>
7. McIntosh, B. S., Ascough II, J. C., Twery, M., Chew, J., Elmahdi, A., Haase, D., ... & Voinov, A. (2011). Environmental decision support systems (EDSS) development—Challenges and best practices. *Environmental Modelling & Software*, 26(12), 1389–1402. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.09.009>
8. Denzer, R. (2015). *Environmental Information Systems*. In S. E. Jorgensen (Ed.), *Handbook of Ecological Processes* (pp. 1–21). Springer.
9. Zanella, A., Bui, N., Castellani, A., Vangelista, L., & Zorzi, M. (2014). Internet of things for smart cities. *IEEE Internet of Things Journal*, 1(1), 22–32. <https://doi.org/10.1109/JIOT.2014.2306328>
10. Cimorelli, A. J., Perry, S. G., Venkatram, A., Weil, J. C., Paine, R. J., Wilson, R. B., ... & Brode, R. W. (2005). AERMOD: A dispersion model for industrial source applications. Part I: General model formulation and boundary layer characterization. *Journal of Applied Meteorology*, 44(5), 682–693. <https://doi.org/10.1175/JAM2227.1>
11. Talbi, E. G. (2009). *Metaheuristics: from design to implementation*. John Wiley & Sons.
12. Lanzafame, R., Monforte, P., Patané, G., & Strano, S. (2022). Optimization of chimney height for thermal power plants using genetic algorithms and dispersion models. *Energy Conversion and Management*, 256, 115388. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115388>
13. Чуб І.А., Новожилова М.В., Андронов В.А. Моделювання прикладних оптимізаційних задач розміщення об'єктів з метричними характеристиками, що змінюються: монографія / Чуб І.А., Новожилова М.В., Андронов В.А. – Харків: НУЦЗ України, 2017. – 167 с.
14. Stoyan, Y. G., & Chugay, A. M. (2009). Mathematical modeling of the layout problems of technological equipment. *Cybernetics and Systems Analysis*, 45(2), 202–211.
15. Zannetti, P. (2013). *Air pollution modeling: theories, computational methods and available software*. Springer Science & Business Media.
16. Rood, A. S. (2014). Performance evaluation of AERMOD, CALPUFF, and ISCST3 for stratospheric dispersion using high-resolution meteorological data. *Atmospheric Environment*, 89, 443–450. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2014.02.054>

17. Church, R. L., & Murray, A. T. (2009). Business site selection, location analysis, and GIS. John Wiley & Sons.
18. Goldberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley.
19. Deb, K. (2000). An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186(2-4), 311–338. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00389-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00389-8)
20. Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks* (Vol. 4, pp. 1942–1948). IEEE.
21. Kennedy, J., & Eberhart, R. C. (1997). A discrete binary version of the particle swarm algorithm. In *1997 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics* (Vol. 5, pp. 4104–4108). IEEE.
22. Karaboga, D., & Akay, B. (2009). A comparative study of Artificial Bee Colony algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 214(1), 108–132. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.03.090>
23. Pan, Q. K., Tasgetiren, M. F., Suganthan, P. N., & Chua, T. J. (2011). A discrete artificial bee colony algorithm for the lot-streaming flow shop scheduling problem. *Information Sciences*, 181(12), 2455–2468. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.01.042>
24. Karaboga, D., & Basturk, B. (2007). A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*, 39(3), 459–471. <https://doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x>
25. Blum, C., & Roli, A. (2003). Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 35(3), 268–308. <https://doi.org/10.1145/937503.937505>
26. Elbeltagi, E., Hegazy, T., & Grierson, D. (2005). Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms. *Advanced Engineering Informatics*, 19(1), 43–53. <https://doi.org/10.1016/j.aei.2005.01.004>
27. Farahani, R. Z., SteadieSeifi, M., & Asgari, N. (2010). Multiple facility location problems: A review. *Applied Mathematical Modelling*, 34(7), 1689–1709. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.10.005>
28. DEAP documentation. <https://deap.readthedocs.io/en/master/index.html>