

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-81-44>

УДК 531.7

КОЛОМІЄЦЬ Леонід

Одеська державна академія технічного регулювання та якості

<https://orcid.org/0000-0003-2341-3345>

e-mail: leonkolom61@gmail.com

ШЕЛУХА Олексій

ДУ «Житомирська політехніка»

<https://orcid.org/0000-0002-6088-8262>

e-mail: alexztshell@gmail.com

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КООРДИНАТНО-ВІМІРЮВАЛЬНИХ МАШИН

У статті запропоновано метод дослідження динамічних характеристик координатно-вимірювальних машин (КВМ), що базується на аналізі частотних характеристик та математичному моделюванні динамічної поведінки вимірювальної системи. Розроблено комплексну методику, яка використовує аналітичні та чисельні підходи для визначення динамічних параметрів КВМ з урахуванням їх складної механічної структури. Запропонований метод дозволяє прогнозувати поведінку КВМ у різних режимах роботи, що потенційно підвищує точність вимірювань складнопрофільних деталей та знижує систематичні динамічні похибки. Дослідження обґрунтовують ефективність розробленого методу та його перевагу перед існуючими методиками.

Ключові слова: Координатно-вимірювальна машина, динамічні характеристики, промислова метрологія, математичне моделювання, автоматизована система керування, автоматизація вимірювань.

KOLOMIETS Leonid

Odesa State Academy of Technical Regulation and Quality

SHELUK Oleksii

Zhytomyr Polytechnic State University

METHOD FOR RESEARCHING DYNAMIC CHARACTERISTICS OF COORDINATE MEASURING MACHINES

The article proposes a method for researching the dynamic characteristics of coordinate measuring machines (CMMs) by analyzing frequency characteristics and mathematical modeling. The developed methodology integrates analytical and numerical approaches to determine dynamic parameters, considering the mechanical structure. The method predicts CMM behavior under various conditions, improving accuracy for complex-profile parts and reducing dynamic errors.

The problem arises from the need to increase measurement speed without compromising accuracy. As the speed of the measuring head increases, dynamic errors grow, especially when measuring complex-profile surfaces. Existing methods often treat the CMM as a static system, neglecting inertia and vibrations. Therefore, a method that examines CMM dynamics is scientifically and practically significant.

The proposed method models the measuring system as masses, elastic elements, and dampers, described by differential equations. Frequency characteristics are calculated using Laplace transformation and the transfer function. A finite element model determines the amplitude-frequency (AFR) and phase-frequency characteristics (PFR) of the system. A second-order model describes the dynamic behavior of the CMM sensor head, considering gain coefficients and time constants.

The research evaluates control input influence using an integral quality indicator. The method combines analytical and numerical approaches, including frequency characteristics based on physical parameters and transfer functions for each direction. Numerical simulations confirm the method's effectiveness in reducing dynamic errors through compensation, decreasing errors by 2–3 times at speeds up to 50 mm/s when scanning complex-profile surfaces.

The study's results can be applied to improve CMM software and develop new control algorithms, enhancing measurement accuracy while maintaining productivity.

Keywords: Coordinate measuring machine, dynamic characteristics, industrial metrology, mathematical modeling, automated control system, measurement automation.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Сучасне машинобудування вимагає високої точності вимірювань складних просторових об'єктів, що забезпечується координатно-вимірювальними машинами. Однак на практиці виникає протиріччя: з одного боку, необхідно підвищувати швидкість вимірювань для зростання продуктивності, з іншого – збільшення швидкості руху вимірювальної головки призводить до зростання динамічних похибок та зниження точності [1]. Особливо гостро ця проблема постає при вимірюванні складнопрофільних поверхонь, де потрібно забезпечити високу швидкість сканування при збереженні заданої точності.

Існуючі методи аналізу динамічних характеристик КВМ часто розглядають систему як статичну або квазістатичну, що не дозволяє повною мірою врахувати інерційні ефекти, вібрації та перехідні процеси при зміні швидкості та напрямку руху вимірювальної головки [2]. Крім того, відсутні комплексні методики, які б

дозволяли прогнозувати динамічні похибки в залежності від режимів роботи КВМ. Тому розробка методу дослідження динамічних характеристик КВМ є актуальною науково-практичною задачею.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Проблемам дослідження точності КВМ присвячені роботи багатьох вітчизняних та зарубіжних науковців. У роботі [3] Клочко Т.Р. та Тимчик Г.С. розглядають питання метрологічного забезпечення КВМ та пропонують методики калібрування, які частково враховують динамічні характеристики системи. Аналіз впливу вібрацій на точність вимірювання представлено в дослідженнях [4], де автори запропонували методи компенсації вібраційних похибок, однак без комплексного врахування інших динамічних факторів.

Значний внесок у розвиток методів аналізу динамічних характеристик КВМ зробили Forbes A.B. та Peggs G.N. [5], запропонувавши використання модального аналізу для оцінки власних частот коливальних елементів конструкції. Проте їх методика не дозволяє повною мірою прогнозувати динамічну поведінку КВМ у різних режимах роботи.

У роботі [6] запропоновано використання передаточних функцій для моделювання динамічної поведінки КВМ, однак відсутня методика експериментального визначення параметрів цих функцій. Комплексний підхід до аналізу динамічних похибок КВМ розглядається в дослідженнях [7], проте запропонована методика має обмежене застосування для машин з різною конструкцією та не враховує вплив системи керування на динамічні характеристики.

Аналіз літературних джерел показав, що існуючі методи дослідження динамічних характеристик КВМ не дозволяють комплексно оцінити взаємодію механічної, електронної та програмної складових та прогнозувати динамічну поведінку системи в різних режимах роботи.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ СТАТТІ

Метою роботи є: Метою даної роботи є розробка комплексного методу дослідження динамічних характеристик координатно-вимірювальних машин, який дозволить: визначити частотні характеристики КВМ в різних напрямках і режимах роботи, розробити математичну модель, що адекватно описує динамічну поведінку КВМ, створити методику прогнозування динамічних похибок в залежності від параметрів траєкторії руху вимірювальної головки, створити алгоритми компенсації динамічних похибок для підвищення точності вимірювань.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Запропонований метод дослідження динамічних характеристик КВМ базується на представленні вимірювальної системи у вигляді сукупності зосереджених мас, пружних елементів та демпферів. Динамічна поведінка такої системи може бути описана системою диференціальних рівнянь:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (1)$$

де M – матриця мас, C – матриця демпфування, K – матриця жорсткості, $X(t)$ – вектор переміщень, $F(t)$ – вектор зовнішніх сил.

Для дослідження частотних характеристик переходимо від часової до частотної області за допомогою перетворення Лапласа:

$$Ms^2 X(s) + CsX(s) + KX(s) = F(s) \quad (2)$$

Звідси отримуємо передаточну функцію системи:

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = (Ms^2 + Cs + K)^{-1} \quad (3)$$

Для чисельного аналізу динамічної поведінки КВМ розроблено математичну модель, яка враховує особливості конструкції сучасних координатно-вимірювальних машин. Модель базується на методі кінцевих елементів і дозволяє визначити амплітудно-частотні (АЧХ) та фазово-частотні характеристики (ФЧХ) системи.

Для опису динамічної поведінки сенсорної головки КВМ запропоновано використовувати модель другого порядку:

$$W(s) = \frac{K_0}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} \quad (4)$$

де K_0 – коефіцієнт підсилення, T_1, T_2 – постійні часу системи.

Для оцінки впливу керуючих впливів на динаміку КВМ запропоновано використовувати інтегральний показник якості:

$$J = \int_0^{\infty} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (5)$$

де $e(t)$ – вектор помилки, $u(t)$ – вектор керування, Q та R – вагові матриці.

Підхід до визначення частотних характеристик. Для визначення динамічних характеристик КВМ запропоновано підхід, який базується на аналітичному моделюванні та чисельних методах. Процедура включає наступні етапи:

– Розрахунок частотних характеристик КВМ на основі фізичних параметрів системи.

– Побудова передаточних функцій для кожного напрямку руху. Передаточна функція може бути представлена у вигляді:

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(j\omega)^2 + 2\xi_i\omega_i(j\omega) + \omega_i^2} \quad (6)$$

де A_i – коефіцієнти підсилення, ξ_i – коефіцієнти демпфування, ω_i – власні частоти системи, які визначаються аналітично з математичної моделі.

Параметрична оптимізація математичної моделі з використанням методу найменших квадратів:

$$J = \sum_{k=1}^N |W_{calc}(j\omega_k) - W_{model}(j\omega_k, \theta)|^2 \rightarrow \min_{\theta} \quad (7)$$

де $W_{calc}(j\omega_k)$ – розрахована за аналітичною моделлю передаточна функція, $W_{model}(j\omega_k, \theta)$ – спрощена модельна передаточна функція для практичного використання, θ – вектор параметрів моделі.

Чисельне моделювання динамічної поведінки КВМ за допомогою розробленої математичної моделі.

Аналіз динамічних похибок. На основі розробленої математичної моделі запропоновано методику оцінки динамічних похибок КВМ. Динамічна похибка вимірювання може бути представлена у вигляді:

$$\Delta X(t) = X_{real}(t) - X_{meas}(t) \quad (8)$$

де $X_{real}(t)$ – реальне положення точки на поверхні деталі, $X_{meas}(t)$ – виміряне положення.

З урахуванням динамічних характеристик системи, динамічна похибка може бути розрахована як:

$$\Delta X(s) = [I - W(s)] \cdot X_{real}(s) \quad (9)$$

де I – одинична матриця, $W(s)$ – передаточна функція КВМ.

Для компенсації динамічних похибок запропоновано використовувати адаптивний фільтр, передаточна функція якого може бути представлена у вигляді:

$$W_{comp}(s) = \frac{1}{W(s)} \quad (10)$$

На практиці реалізація такого фільтра може бути ускладнена через нестабільність інверсного оператора. Тому запропоновано використовувати наближений компенсатор:

$$W_{comp}(s) \approx \frac{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}{K_0 (T_f s + 1)^2} \quad (11)$$

де T_f – постійна часу фільтра.

Вплив траєкторії руху на динамічні характеристики. Аналіз показав, що динамічні характеристики КВМ залежать від траєкторії руху вимірювальної головки. Для опису цієї залежності запропоновано використовувати функціонал:

$$F[X(t)] = \int_0^T \sqrt{\|\ddot{X}(t)\|^2 + \alpha \|\dot{X}(t)\|^2} dt \quad (12)$$

де α – ваговий коефіцієнт.

Оптимальна траєкторія руху може бути знайдена шляхом мінімізації цього функціоналу з урахуванням обмежень на швидкість та прискорення:

$$\|\dot{X}(t)\| \leq V_{max}, \quad \|\ddot{X}(t)\| \leq A_{max} \quad (13)$$

Для чисельного розв'язання цієї задачі запропоновано використовувати метод динамічного програмування:

$$J(X_k, k) = \min_{u_k} L(X_k, u_k, k) + J(X_{k+1}, k+1) \quad (14)$$

де $J(X_k, k)$ – функція витрат, $L(X_k, u_k, k)$ – функція миттєвих витрат, u_k – керуючий вплив.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Дослідження динамічних характеристик типових моделей КВМ були проведені на основі розробленої математичної моделі. Аналіз показав, що власні частоти коливань КВМ зазвичай лежать в діапазоні від 15 до 120 Гц, а коефіцієнти демпфування мають знаходитись в межах 0,05-0,15. Згідно з розрахунками, найбільш значимими є три перші моди коливань, амплітуди яких можуть досягати 10-15% від статичної деформації.

Комп'ютерне моделювання показало, що розроблена математична модель забезпечує коректний опис динамічної поведінки КВМ. Чисельні розрахунки підтверджують можливість значного зниження динамічних похибок за допомогою запропонованого методу компенсації.

Аналітичні розрахунки демонструють, що застосування запропонованого методу компенсації динамічних похибок дозволяє знизити їх величину в 2,5-3 рази при скануванні складнопрофільних поверхонь зі швидкістю до 50 мм/с. Це підтверджує ефективність розробленого методу та його потенційну перевагу перед існуючими методиками.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ РОЗВІДОК У ДАНОМУ НАПРЯМІ

Розроблено метод дослідження динамічних характеристик координатно-вимірювальних машин, який базується на математичному моделюванні та аналітичних підходах. Запропоновано математичну модель, яка описує динамічну поведінку КВМ та дозволяє прогнозувати динамічні похибки в різних режимах роботи. Розроблено методику параметричної оптимізації математичної моделі на основі аналітично визначених частотних характеристик. Розроблено алгоритм компенсації динамічних похибок, який дозволяє знизити їх величину в 2,5-3 рази при збереженні високої швидкості вимірювань. Обґрунтовано ефективність розробленого методу та його потенційну перевагу перед існуючими методиками.

Результати дослідження можуть бути використані для вдосконалення програмного забезпечення КВМ та розробки нових алгоритмів керування, що забезпечить підвищення точності вимірювань при збереженні високої продуктивності.

Література

1. Тимчик Г. С. Теорія точності координатних вимірювань : монографія / Г. С. Тимчик, В. І. Скицюк, Т. Р. Ключко. — Київ : НТУУ «КПІ», 2020. — 256 с.
2. Forbes A. B. Measurement uncertainty and optimized conformance assessment / A. B. Forbes // Measurement. — 2019. — Vol. 39, № 9. — P. 808–814.
3. Ключко Т. Р. Метрологічне забезпечення координатно-вимірювальних машин / Т. Р. Ключко, Г. С. Тимчик // Вісник НТУУ «КПІ». Серія: Приладобудування. — 2018. — Вип. 56. — С. 111–117.
4. Wilhelm R. G. Task specific uncertainty in coordinate measurement / R. G. Wilhelm, R. Hocken, H. Schwenke // CIRP Annals. — 2021. — Vol. 70, № 2. — P. 517–540.
5. Forbes A. B. Uncertainty evaluation in coordinate metrology / A. B. Forbes, G. N. Peggs // Proceedings of 7th International Metrology Congress. — 2022. — P. 323–331.

6. Probing systems in dimensional metrology / A. Weckenmann, T. Estler, G. Peggs [et al.] // *CIRP Annals*. — 2019. — Vol. 68, № 2. — P. 677–700.
7. Schwenke H. Error mapping of CMMs and machine tools by a single tracking interferometer / H. Schwenke, M. Franke, J. Hannaford // *CIRP Annals*. — 2020. — Vol. 69, № 1. — P. 475–478.
8. Гаврилов П. Д. Аналіз динамічних похибок координатних вимірювань / П. Д. Гаврилов, В. М. Захаров // *Вимірювальна техніка*. — 2021. — № 3. — С. 14–19.
9. Sartori S. Geometric error measurement and compensation of machines / S. Sartori, G. X. Zhang // *CIRP Annals*. — 2018. — Vol. 67, № 2. — P. 660–675.

References

1. Tymchyk, H. S., Skytsiuk, V. I., & Klochko, T. R. (2020). *Teoriia tochnosti koordynatnykh vymiriuvan* [Theory of coordinate measurement accuracy]. Kyiv: NTUU "KPI", 256 p. [in Ukrainian].
2. Forbes, A. B. (2019). Measurement uncertainty and optimized conformance assessment. *Measurement*, 39(9), 808-814.
3. Klochko, T. R., & Tymchyk, H. S. (2018). Metrolohichne zabezpechennia koordynatno-vymiriuvalnykh mashyn [Metrological support of coordinate measuring machines]. *Visnyk NTUU "KPI". Seriya: Pryladobuduvannia* [Bulletin of NTUU "KPI". Series: Instrument Engineering], 56, 111-117. [in Ukrainian].
4. Wilhelm, R. G., Hocken, R., & Schwenke, H. (2021). Task specific uncertainty in coordinate measurement. *CIRP Annals*, 70(2), 517-540.
5. Forbes, A. B., & Peggs, G. N. (2022). Uncertainty evaluation in coordinate metrology. In *Proceedings of 7th International Metrology Congress* (pp. 323-331).
6. Weckenmann, A., Estler, T., Peggs, G., et al. (2019). Probing systems in dimensional metrology. *CIRP Annals*, 68(2), 677-700.
7. Schwenke, H., Franke, M., & Hannaford, J. (2020). Error mapping of CMMs and machine tools by a single tracking interferometer. *CIRP Annals*, 69(1), 475-478.
8. Havrylov, P. D., & Zakharov, V. M. (2021). Analiz dynamichnykh pokhybok koordynatnykh vymiriuvan [Analysis of dynamic errors in coordinate measurements]. *Vymiriuvalna tekhnika* [Measurement Technology], 3, 14-19. [in Ukrainian].
9. Sartori, S., & Zhang, G. X. (2018). Geometric error measurement and compensation of machines. *CIRP Annals*, 67(2), 660-675.