https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-82-62
УДК 004.[021+023+67+9]:519.6

ГРИЦЮК Юрій
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0000-0001-8183-3466
e-mail: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua
ГРИЦЮК Павло
Національний університет "Львівська політехніка"
https://orcid.org/0009-0003-5409-2043
e-mail: pavlo.y.hrytsiuk@lpnu.ua

МЕТОД ГЕНЕРУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТІ УТОЧНЕНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ФІБОНАЧЧІ ДЛЯ ШИФРУВАННЯ ДАНИХ

Наведено метод генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі не вище (m+n–2)-го номера. Отримані матриці Фібоначчі дають змогу знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, придатні для матричного шифрування блокових даних. Виявлено недоліки у традиційному підході до формування структури елементів таких матриць, насамперед кількості (k) різних її елементів, якими є поліноми Фібоначчі не вище (n–1)-го степеня. Така незначна кількість елементів є не тільки малоінформативною та прозорою для криптоаналітика, але й не стійкою щодо криптоаналізу. Уточнено структуру елементів поліноміальних матриць Фібоначчі, кількість яких залежить від порядку матриці (m) і становить k = m+1. Запропонована структура елементів n-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку має цікаву властивість, згідно з якою можна уникнути використання рекурентного матричного співвідношення для їх генерування, а утворювати тільки за номерами послідовності поліномів Фібоначчі, конкретні значення яких залежать від місця їхнього розташування в матриці та номера її стовпця. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати як послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, так і знаходити їхні визначники та обчислювати обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку, придатних як для шифрування блокових повідомлень, так і їх розшифрування.

Ключові слова: послідовність поліномів Фібоначчі; рекурентне матричне співвідношення; алгоритм утворення послідовності; обернена поліноміальна матриця Фібоначчі; зашифроване повідомлення; матричний метод шифрування даних.

HRYTSIUK Yurii, GRYTSIUK Pavlo
Lviv Polytechnic National University

METHOD FOR GENERATING A SEQUENCE OF REFINED FIBONACCI POLYNOMIAL MATRICES FOR DATA ENCRYPTION

A method for generating the nth sequence of refined Fibonacci polynomial matrices of the mth order, whose elements are Fibonacci polynomials of order not higher than (m+n–2)th number is presented. The obtained Fibonacci matrices allow finding both their determinants and inverse matrices suitable for matrix encryption of block data. The shortcomings of the traditional approach to forming the structure of the elements of such matrices are revealed, primarily the number (k) of its different elements, which are Fibonacci polynomials of order not higher than (n–1). Such an insignificant number of elements is not only uninformative and transparent for the cryptanalyst, but also not stable with respect to cryptanalysis. The structure of the elements of Fibonacci polynomial matrices is specified, the number of which depends on the order of the matrix (m) and is k = m+1. The proposed structure of the elements of the nth sequence of Fibonacci polynomial matrices of the mth order has an interesting property, according to which it is possible to avoid using the recurrent matrix relation for their generation, and to form them only by the numbers of the sequence of Fibonacci polynomials, the specific values of which depend on their location in the matrix and its column number. Software has been developed that allows generating both sequences of refined Fibonacci polynomial matrices of the mth order, and finding their determinants and inverse polynomial matrices of a similar order, suitable for both encrypting block messages and decrypting them.

Keywords: sequence of Fibonacci polynomials; recurrent matrix relation; sequence formation mechanism; inverse Fibonacci polynomial matrix; encrypted message; matrix data encryption method.

Стаття надійшла до редакції / Received 20.03.2025
Прийнята до друку / Accepted 11.05.2025

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ВАЖЛИВИМИ НАУКОВИМИ ЧИ ПРАКТИЧНИМИ ЗАВДАННЯМИ

Раніше так звані поліноміальні матриці Фібоначчі не мали широкої популярності через громіздкі математичні викладки та значні витрати обчислювальних ресурсів. Однак, прогрес інформаційних технологій посприяв тому, що такі матриці Фібоначчі та різноманітні їхні модифікації почали застосовувати в різних областях знань [39], враховуючи й шифрування блокових даних насамперед матричним методом [23]. Чимала кількість досліджень щодо особливостей генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, елементами яких є поліноми Фібоначчі та їхні різноманітні аналоги, за останні декілька десятиліть хоча й трапляються час від часу у відкритому друці, однак вони значно менше досліджені, ніж так звані матриці Фібоначчі, елементами яких є різноманітні числа Фібоначчі. Наприклад, у роботі [14] розроблено $\overline{\overline{Q}}_m^n$-матрицю Фібоначчі розміром $m \times m$, елементами якої є поліноми Фібоначчі $(n-1)$-го степеня і менше, а також

досліджено основні її властивості. У роботі [25] автори навели $Q_h(x)$-матрицю Фібоначчі, елементами якої є поліноми Фібоначчі n-го степеня, що узагальнюють Q-матрицю Фібоначчі, породжену відповідними числами. Автори роботи [24] розглядають матрицю Паскаля та визначають нове узагальнення поліномів Фібоначчі, які було названо (p,q)-поліномами Фібоначчі. У роботі [20] наведено метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі не більше $(n–1)$-го степеня, який дає можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, придатні для матричного методу шифрування блокових даних.

Чимала кількість досліджень стосується різних підходів до генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, а також особливостей їхнього використання для шифрування блокових даних. Наприклад, у роботі [29] розроблено новий клас квадратних $Q^n_{pm}(x)$-матриць Фібоначчі $(n–1)$-го степеня та pm-го порядку для шифрування даних, елементами яких є поліноми Фібоначчі. У роботі [9] автори показали, що, за умови правильного вибору початкових членів полінома для (m,t)-розширення його p-числами Фібоначчі, можна застосувати процедуру шифрування даних з використанням $G_{p,m,t}$-матриці Фібоначчі. У роботі [7] запропоновано нову теорію шифрування даних з використанням узагальнених n-крокових поліномів Фібоначчі, на підставі яких визначено новий клас квадратної $M_{h,n}(x)$-матриці n-го порядку та отримано певні співвідношення між елементами цієї матриці. Однак, автори цих і багатьох інших досліджень вважають, що як окрему процедуру шифрування даних за допомогою послідовностей поліноміальних матриць Фібоначчі для передачі їх каналами зв'язку застосовувати недоцільно через малу кількість різних елементів таких матриць, а також незначну криптостійкість алгоритму шифрування [4].

У кожному з вказаних вище та багатьох інших дослідженнях тією чи іншою мірою обґрунтовано різні підходи щодо генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, проте не наведено приклади їхнього конкретного вигляду, однак доведено доцільність їх використання для шифрування блокових даних як складової дещо складніших алгоритмів. Тільки у роботі [20] розроблено метод генерування n-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі не вище $(n–1)$-го степеня. Цей метод використовує матричне рекурентне співвідношення, аналогічне рекурентному співвідношенню для генерування чисел Фібоначчі, в якому було застосовано загальновідому структуру елементів таких матриць [36]. Однак, навіть поверхневий аналіз послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до 5-го порядків, наведених у дослідженні [20], показує, що застосування традиційної структури елементів таких матриць є недоцільним через незначну кількість (k) різних поліномів Фібоначчі не вище $(n–1)$-го степеня. Наприклад, для матриць Фібоначчі будь-якого порядку (m) таких різних поліномів Фібоначчі буде всього $k = 3$, степінь яких залежатиме тільки від номера (n) послідовності поліноміальної матриці Фібоначчі, а саме від $(n–3)$-го до $(n–1)$-го степеня. Така мала кількість різних елементів матриць Фібоначчі та незначне варіювання степенів відповідних поліномів Фібоначчі є не тільки малоінформативною та прозорою для криптоаналітика, але й слабкою щодо криптоаналізу відповідного алгоритму [19, 21]. Тому виникає потреба проведення додаткового дослідження щодо особливостей генерування послідовностей поліноміальних матриць Фібоначчі та уточнення структури їхніх елементів так, щоб за отриманими матрицями була можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, а також можливість встановлення певних особливостей їхнього використання тільки як локального методу шифрування блокових даних.

Об'єкт дослідження – генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі.

Предмет дослідження – методи та алгоритми генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку як основи для шифрування блокових даних, що дасть можливість здійснювати ефективний їх захист.

Мета роботи – розробити метод генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, структура елементів яких міститиме значну кількість поліномів Фібоначчі відповідних номерів, який дасть можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, що сукупно уможливить їхнє застосування у матричному методі шифрування блокових даних.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні *завдання дослідження*:

- проаналізувати останні дослідження та публікації, а також з'ясувати складність проблеми генерування послідовності так званих поліноміальних матриць Фібоначчі, які стануть основою для шифрування блокових даних, що дасть змогу здійснювати ефективний їх захист;
- розробити метод генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі відповідних номерів, який дасть можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, які можна застосовувати у матричному методі шифрування блокових даних;
- навести алгоритми утворення деякої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до 5-го порядків, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі відповідних номерів, що дасть змогу проаналізувати не тільки особливості їхньої побудови загалом, але й усвідомити процедури знаходження їхніх визначників і обернених матриць зокрема;

- навести конкретний приклад застосування матричного методу шифрування блокових даних уточненою поліноміальною матрицею Фібоначчі, що дасть змогу зацікавленому читачу зрозуміти основний принцип шифрування як початкового повідомлення, так і розшифрування зашифрованих даних;
- зробити висновки за результатами виконаного дослідження та надати відповідні рекомендації щодо їх практичного використання.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Різні послідовності поліномів під назвою поліноми Фібоначчі та Лукаса трапляються в науковій літературі протягом останніх декількох десятиліть. Наприклад, у роботі [34] розглянуто узагальнені поліноми Фібоначчі та деякі їхні фундаментальні властивості. Їхнє узагальнення зроблено з використанням різних підходів насамперед шляхом зміни початкових умов їх побудови та коефіцієнтів біля поточного та попереднього їх номерів. У своєму дослідженні автори вивчали так звані узагальнені поліноми Фібоначчі з будь-яким цілим числом. Також вони навели деякі фундаментальні властивості узагальнених поліномів Фібоначчі, які повністю співпадають із числами Фібоначчі.

У роботі [35] проаналізовано поліноми Фібоначчі та детерміновані тотожності, пов'язані з ними. Авторами встановлено, що поліноми Фібоначчі та поліноми Лукаса володіють чудовими та дивовижними властивостями, а також відповідними детермінованими тотожностями, які було детально описано. Записи детермінованих тотожностей задовольняють рекурентним співвідношенням утворення поліномів Фібоначчі та поліномів Лукаса.

У роботі [25] наведено відомості про узагальнені $h(x)$-поліноми Фібоначчі та Лукаса, утворені функцією $h(x)$, яка може бути поліномом як з цілими, так і з дійсними коефіцієнтами. Вони наводять $h(x)$-поліноми Фібоначчі, які узагальнюють як поліноми Фібоначчі-Каталона, так і поліноми Фібоначчі-Берда, а також вказують на їхні відповідні властивості. Автори також наводять $h(x)$-поліноми Лукаса, які узагальнюють поліноми Лукаса та вказують на їхні відповідні властивості. Окрім цього, автори навели $Q_h(x)$-матрицю Фібоначчі, елементами якої є поліноми Фібоначчі n-го степеня, що узагальнюють Q-матрицю Фібоначчі, породжену відповідними числами.

У роботі [32] наведено інформацію про згорнуті узагальнені поліноми Фібоначчі та Лукаса. Автори визначають згорнуті $h(x)$-поліноми Фібоначчі як розширення класичних чисел Фібоначчі. Також вони наводять декілька комбінаторних формул, що містять $h(x)$-поліноми Фібоначчі та Лукаса. Окрім цього, автори отримали згорнуті $h(x)$-поліноми Фібоначчі з сімейства матриць Гессенберга (англ. *Hessenberg*) та довели їхні відповідні властивості.

У роботі [38] наведено інформацію про деякі властивості узагальнених поліномів Фібоначчі та Лукаса, отримані шляхом використання матриць та розкладання Лапласа. Дослідники наводять нові сімейства тридіагональних матриць, послідовні детермінанти яких породжують будь-яку підпослідовність цих поліномів.

У роботі [24] наведено деякі властивості (p,q)-поліномів Фібоначчі та Лукаса. Автори вважають, що масиви Ріордана (англ. *Riordan*) корисні для отримання комбінаторних сум за допомогою генерувальних функцій. Вони стверджують, що багато теорем можна легко довести за допомогою масивів Ріордана. Автори розглядають матрицю Паскаля (англ. *Pascal*) та визначають нове узагальнення поліномів Фібоначчі, які називають (p,q)-поліномами Фібоначчі. За допомогою методу Ріордана вони отримують комбінаторні тотожності, а також здійснюють факторизацію матриці Паскаля, що містить (p,q)-поліноми Фібоначчі.

У роботі [29] наведено обнадійливі, як на перший погляд, показники надійності теорії шифрування даних поліномами Фібоначчі. Розроблено новий клас квадратних $Q_{pm}^{n}(x)$ -матриць Фібоначчі $(n–1)$-го степеня та pm-го порядку для шифрування даних, де $p \geq 3$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $x \geq 1$, елементами яких є поліноми Фібоначчі. Запропонований метод дешифрування даних випливає з можливості отримання відповідних обернених $Q_{pm}^{-n}(x)$ -матриць Фібоначчі, визначник яких становить ± 1. При цьому відзначено як незначні тривалості виконання таких процедур, так і надійність зашифрованих повідомлень, стійких до криптографічних атак [19, 21].

У роботі [4] розглянуто підхід до реалізації криптосистеми з використанням поліномів і чисел Лукаса. Автори навели інноваційний підхід до реалізації криптосистеми, яка використовує поліноми та числа Лукаса. Числа Лукаса, послідовність яких подібна до чисел Фібоначчі, мають унікальні властивості, які часто використовують для шифрування та дешифрування даних. Запропонована поліноміальна криптосистема Лукаса описує процеси генерування ключів, шифрування та дешифрування, вказуючи на питання безпеки та особливості управління ключами. Стійкість системи залежить від складності розкладання великих простих чисел і виклику щодо отримання секретного ключа з відкритого ключа. У своєму дослідженні автори забезпечують всебічне розуміння криптосистеми та досліджують її потенційні можливості застосування в безпечному зв'язку та захисті даних. Також проведено широкий аналіз і криптоаналіз, щоб оцінити безпеку та

ефективність запропонованої системи, що робить її перспективним доповненням до криптографічного середовища.

У роботі [7] запропоновано нову теорію шифрування даних з використанням узагальнених n-крокових поліномів Фібоначчі, на підставі яких визначено новий клас квадратної $M_{h,n}(x)$-матриці n-го порядку ($x \geq 1$) та отримано певні співвідношення між елементами цієї матриці. Проаналізовано достовірність застосування цього методу, де показано, що для $n = 2$ його коригувальна здатність становить 93,33 %, тоді як для $n = 3$ вже становить 99,80 %. Цікавою особливістю розробленого методу шифрування даних є те, що його достовірність не залежить від коефіцієнтів полінома Фібоначчі залежного від номера його послідовності, за винятком коефіцієнта $h_n(x) = 1$, і зростає зі збільшенням порядку квадратної $M_{h,n}(x)$-матриці вхідного повідомлення.

У роботі [14] розроблено метод шифрування будь-яких повідомлень на підставі поліномів Фібоначчі. Для цілих чисел $m \geq 2$, $x \geq 1$ і $n \geq 1$ було розроблено $\overline{\overline{Q}}_m^n$ -матрицю Фібоначчі розміром $m \times m$, елементами якої є поліноми Фібоначчі (n–1)-го степеня, а визначник матриці становить ±1. Для розшифрування даних автори ввели обернену $\overline{\overline{Q}}_m^{-n}(x)$ -матрицю, елементи якої є оберненими поліноми Фібоначчі n-го степеня.

У роботі [9] наведено узагальнену теорію шифрування даних на (m,t)-розширенні поліномів p-числами Фібоначчі. Спочатку автори визначають (m,t)-розширення p-чисел Фібоначчі та золотих (p,m,t)-пропорцій, де $p \geq 0$ є цілим невід'ємним числом, $m > 0$ і $t > 0$. Вони встановили співвідношення між золотою (p,m,t)-пропорцією, між золотою (p,m)-пропорцією та між золотою p-пропорцією, внаслідок чого було визначено квадратну $G_{p,m,t}$-матрицю Фібоначчі. Також автори показали, що, за умови правильного вибору початкових членів полінома для (m,t)-розширення його p-числами Фібоначчі, можна застосувати процедуру шифрування даних з використанням $G_{p,m,t}$-матриці Фібоначчі. Розроблено процедуру, яка за відомими значеннями степеня матриці (n) та p-чисел Фібоначчі дає змогу генерувати відповідну множину ключів шифрування даних, що забезпечує не тільки ефективний спосіб їх утворення та зберігання, але й створює зручність при передаванні каналами зв'язку. Зроблено висновок, що для $t = 1$ зв'язки між елементами матриці шифрування даних для різних значень p і m збігаються з аналогічними початковими членами чисел Фібоначчі [8].

У роботі [3] розглянуто тип загальнодоступної криптосистеми для шифрування потокових і блокових повідомлень, що використовує як послідовності поліномів Пелла, так і послідовності поліноміальних матриць Пелла. Автори створили своєрідну криптосистему з відкритим ключем за допомогою послідовностей поліномів і матриць Пелла шляхом використання властивостей як поліномів, так і матриць Пелла через перетворення поліномів у вісімкову та двійкову систему числення. Захист цифрових даних і їх модифікація вони здійснювали за допомогою сучасних криптографічних методів, які відіграють важливу роль у безпеці мережі.

Отже, за результатами проведеного аналізу останніх досліджень та публікацій стосовно наявних підходів до генерування послідовності як поліномів Фібоначчі n-го степеня, так і поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, а також особливостей їх використання для шифрування даних було встановлено, що навіть за останнє десятиліття виконано багато різноманітних досліджень, в кожному з яких тією чи іншою мірою обґрунтовано різні алгоритми їхньої побудови, а також доведено доцільність їх використання для шифрування потокових і блокових даних. Водночас, застосування поліномів і поліноміальних матриць Фібоначчі як окремої процедури для захисту відповідно потокових і блокових даних у теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко. Тому проведення додаткового дослідження щодо розроблення ефективного методу генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких будуть відповідні поліноми Фібоначчі, а також встановлення певних особливостей їхнього використання для шифрування блокових даних тільки як локального методу є актуальним завданням, яке й спробуємо частково вирішити в цьому дослідженні.

ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі. Для генерування послідовності поліномів Фібоначчі використовують таке рекурентне співвідношення [5]:

$$F^{(n+1)}(x) = xF^{(n)}(x) + F^{(n-1)}(x), \quad (1)$$

де $F^{(n+1)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ і $F^{(n-1)}(x)$ – відповідно наступний, поточний та попередній вигляд полінома Фібоначчі. Для $F^{(0)}(x) = 0$ та $F^{(1)}(x) = 1$ наступний поліном Фібоначчі матиме вигляд $F^{(2)}(x) = x \cdot F^{(1)}(x) + F^{(0)}(x) = x \cdot 1 + 0 = x$.

Застосувавши рекурентне співвідношення (1), послідовність перших декількох і наступних вибіркових поліномів Фібоначчі матимуть такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&F^{(0)}(x)=0; F^{(1)}(x)=1;\\
&F^{(2)}(x)=x;\\
&F^{(3)}(x)=x^2+1;\\
&F^{(4)}(x)=x^3+2x;\\
&F^{(5)}(x)=x^4+3x^2+1;\\
&F^{(6)}(x)=x^5+4x^3+3x;\\
&F^{(7)}(x)=x^6+5x^4+6x^2+1;\\
&F^{(8)}(x)=x^7+6x^5+10x^3+4x;\\
&F^{(9)}(x)=x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1;\\
&F^{(10)}(x)=x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x;\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
&F^{(15)}(x)=x^{14}+13x^{12}+66x^{10}+165x^8+210x^6+126x^4+28x^2+1;\\
&\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
&F^{(20)}(x)=x^{19}+18x^{17}+136x^{15}+560x^{13}+1365x^{11}+2002x^9+1716x^7+792x^5+165x^3+10x.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі полягає у використанні рекурентного співвідношення (1), згідно з яким наступний поліном утворюють шляхом множення змінної x послідовно на елементи поточного полінома, після чого групують схожі доданки з доданками попереднього полінома. Наприклад, за вхідних поліномів $F^{(6)}(x)$ і $F^{(7)}(x)$ відповідно 5-го і 6-го степенів з послідовності поліномів (2) наступний поліном 7-го степеня матиме такий вигляд:

$F^{(8)}(x) = xF^{(7)}(x) + F^{(6)}(x) = x(x^6 + 5x^4+6x^2 + 1) + (x^5 + 4x^3+3x) =$
$= x^7 + 5x^5+6x^3 + x + x^5 + 4x^3+3x = x^7 + 6x^5+10x^3 + 4x.$

Оскільки послідовності поліномів Фібоначчі є природним розширенням відповідних послідовностей чисел Фібоначчі [2, 15], тому багато їхніх властивостей допускають пряме їхнє доведення [27, 33, 42].

2. Алгоритм утворення послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі. З роботи [39] відомо, що поліноміальна $\bar{\bar{Q}}_2(x)$-матриця Фібоначчі розміром 2×2 має такий вигляд

$$
\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n+1)}(x) & F^{(n)}(x) \\ F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{3}
$$

а її визначник отримують за формулою

$$
\det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x)\right) = F^{(n+1)}(x)F^{(n-1)}(x) - (F^{(n)}(x))^2 = (-1)^{n+1}, \tag{4}
$$

яку ще називають тотожністю Кассіні [23]. Наприклад, для 4-ої та 5-ої поліноміальних матриць Фібоначчі 2-го порядку їхні визначники матимуть такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
\det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x)\right) &= F^{(4)}(x)F^{(2)}(x) - (F^{(3)}(x))^2 = (x^3+2x)x - (x^2+1)^2 = -1;\\
\det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x)\right) &= F^{(5)}(x)F^{(3)}(x) - (F^{(4)}(x))^2 = (x^4+3x^2+1)(x^2+1) - (x^3+2x)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

З роботи [36] також відомо, що поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)$-матриці Фібоначчі 2-го, 3-го, 4-го, 5-го і m-го порядків мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}; \bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}; \bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4};\\
&\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5}; \bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Для генерування послідовності поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)$-матриць Фібоначчі використовують рекурентне матричне співвідношення, аналогічне співвідношенню (1), яке в нашому випадку матиме такий вигляд:

$$
\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x) + \bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x), \tag{6}
$$

де $\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x)$, $\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x)$ і $\bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x)$ – відповідно наступний, поточний та попередній вигляд поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі.

Метод генерування послідовності поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі *m*-го порядку полягає у використанні рекурентного матричного співвідношення (6), згідно з яким наступну поліноміальну $\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x)$-матрицю утворюють шляхом множення змінної *x* послідовно на елементи поточної $\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x)$-матриці, якими є відповідні поліноми Фібоначчі, додавання елементів утвореної матриці до елементів попередньої $\bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x)$-матриці, після чого у кожному з її утворених елементів групують всі схожі доданки. Наприклад, для $\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ та $\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\det(\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x))=x\cdot 0-1\cdot 1=-1$, а наступна поліноміальна матриця Фібоначчі матиме такий вигляд:

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2 & x\\ x & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+1 & x\\ x & 1\end{bmatrix};$$
$$\det(\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x))=(x^2+1)\cdot 1-x\cdot x=1. \qquad (7)$$

Оскільки поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриці Фібоначчі часто використовують для реалізації операцій шифрування даних, то аналогічні оберненні матриці також потрібно мати для зворотного процесу – розшифрування даних. Інтуїтивно зрозуміло, що ці $\bar{\bar{Q}}_m^{-(\cdot)}(x)$-матриці Фібоначчі мають бути оберненими до матриць шифрування даних, які назвемо *оберненими поліноміальними* $\bar{\bar{Q}}_m^{-(\cdot)}(x)$*-матрицями Фібоначчі*. Подібно до поліноміальних матриць шифрування даних, обернені поліноміальні матриці Фібоначчі мають мати також загальний вигляд.

Для знаходження оберненої матриці 2-го порядку використовують такий вираз [16]:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Наприклад, для $\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ маємо $\bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x)=\frac{1}{x\cdot 0-1\cdot 1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -x\end{bmatrix}$, а для матриці (7) отримаємо

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix}x^2+1 & x\\ x & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot 1-x\cdot x}\begin{bmatrix}1 & -x\\ -x & x^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -x\\ -x & x^2+1\end{bmatrix}.$$

Покажемо, що матричний вираз $\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(n)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}$ можна виконати для будь-якого значення *n*, наприклад *n*=2 та *n*=3, де $\bar{\bar{I}}_{2\times 2}$ – одинична матриця *m*=2-го порядку.

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cdot 0+1\cdot 1 & x\cdot 1+1\cdot(-x)\\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot -x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$
$$\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}\Rightarrow \qquad (9)$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2+1 & x\\ x & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -x\\ -x & x^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x^2+1)\cdot 1+x\cdot(-x) & (x^2+1)\cdot(-x)+x\cdot(x^2+1)\\ x\cdot 1+1\cdot(-x) & x\cdot(-x)+1\cdot(x^2+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Як видно з матричних виразів (5), а також проведеного аналізу послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до 5-го порядків, наведених у роботі [20], традиційний підхід до формування структури елементів таких матриць має деякі недоліки, один з яких стосується кількості (*k*) різних її елементів, якими є поліноми Фібоначчі не вище (*n*–1)-го степеня. Наприклад, для матриць Фібоначчі будь-якого порядку (*m*) таких різних поліномів Фібоначчі буде всього *k* = 3, степінь яких залежатиме тільки від *n*-ої послідовності поліноміальної матриці Фібоначчі (див. матричні вирази (16), (19), (20) чи (21) з роботи [20]). Така незначна їхня кількість є не тільки малоінформативною та прозорою для криптоаналітика [4], але й нестійкою щодо криптоаналізу [19, 21].

З огляду на зазначене вище, вважаємо за доцільне дещо уточнити структуру елементів поліноміальних матриць Фібоначчі, кількість яких мала б залежати насамперед від їхнього порядку (*m*). Окрім цього, для розуміння суті викладеного нижче матералу використаємо не степені поліномів Фібоначчі, а їхні номери з математичних виразів (2), наприклад $F^{(3)}(x)$ чи $F^{(5)}(x)$, де *n* становитиме відповідно 3 і 5. Тоді, для $\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)$-матриці Фібоначчі *m* = 2-го порядку її структура елементів буде незмінною (16), тобто кількість її

різних елементів, якими будуть поліноми Фібоначчі не вище n = 2-го номера, становитиме $k_2 = m+1 = 2+1 = 3$. Водночас, для $\overline{\overline{Q}}_3^{(2)}(x)$-матриці Фібоначчі m = 3-го порядку структуру елементів спробуємо дещо змінити в бік збільшення кількості видів поліномів до 3-го номера, тобто кількість різних елементів матриці, якими будуть поліноми Фібоначчі, тепер становитиме $k_3 = 3+1 = 4$. Аналогічно змінимо структуру елементів $\overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)$ - та $\overline{\overline{Q}}_5^{(2)}(x)$-матриць Фібоначчі відповідно 4-го і 5-го порядків у бік збільшення кількості видів їхніх поліномів Фібоначчі відповідно до 4-го та 5-го номерів, тобто кількість різних елементів цих матриць становитиме відповідно $k_4 = 5$ і $k_5 = 6$. У виразах (16) для $\overline{\overline{Q}}_m^{(2)}(x)$-матриці Фібоначчі в її лівій верхній частині елементів у дужках наведено ідентифікатори значень номерів їхніх відповідних поліномів Фібоначчі, загальна кількість яких у такій матриці становитиме $k_m = m + 1$.

$$\overline{\overline{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \overline{\overline{Q}}_3^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3};\ \overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4};$$

$$\overline{\overline{Q}}_5^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5};\ \overline{\overline{Q}}_m^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} (m) & (m-1) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (m-1) & (m-2) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & (m-2) & (m-3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} \quad (10)$$

Варто зазначити, що вказані у матричних виразах (10) ідентифікатори номерів поліномів Фібоначчі стосуються тільки n = 2-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку. Для більших номерів ($n > 3$) послідовності матриць Фібоначчі та ще й з урахуванням їхнього порядку (m) номери їхніх поліномів Фібоначчі матимуть дещо інший вигляд. Для встановлення номерів цих поліномів Фібоначчі розглянемо матричні вирази (11), в яких наведено елементи матриць Фібоначчі m-го порядку у вигляді ідентифікаторів відповідних поліномів Фібоначчі для n = 2-ої послідовності поліноміальних матриць. Якщо ж розглянути загалом варіанти n-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, то вони матимуть вигляд, який показано на матричних виразах (12).

$$\overline{\overline{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(2)}(x) & F^{(1)}(x) \\ F^{(1)}(x) & F^{(0)}(x) \end{bmatrix};\ \overline{\overline{Q}}_3^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(3)}(x) & F^{(2)}(x) & 0 \\ 0 & F^{(2)}(x) & F^{(1)}(x) \\ 0 & F^{(1)}(x) & F^{(0)}(x) \end{bmatrix}_{3\times 3};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(4)}(x) & F^{(3)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & F^{(3)}(x) & F^{(2)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & F^{(2)}(x) & F^{(1)}(x) \\ 0 & 0 & F^{(1)}(x) & F^{(0)}(x) \end{bmatrix}_{4\times 4};\ \overline{\overline{Q}}_5^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(5)}(x) & F^{(4)}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^{(4)}(x) & F^{(3)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F^{(3)}(x) & F^{(2)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{(2)}(x) & F^{(1)}(x) \\ 0 & 0 & 0 & F^{(1)}(x) & F^{(0)}(x) \end{bmatrix}_{5\times 5}; \quad (11)$$

$$\overline{\overline{Q}}_m^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(m)}(x) & F^{(m-1)}(x) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & F^{(m-1)}(x) & F^{(m-2)}(x) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & F^{(m-2)}(x) & F^{(m-3)}(x) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F^{(2)}(x) & F^{(1)}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F^{(1)}(x) & F^{(0)}(x) \end{bmatrix}_{m\times m}.$$

$$\overline{\overline{Q}}_2^{(n)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \\ F^{(n-1)}(x) & F^{(n-2)}(x) \end{bmatrix};\ \overline{\overline{Q}}_3^{(n)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n+1)}(x) & F^{(n)}(x) & 0 \\ 0 & F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \\ 0 & F^{(n-1)}(x) & F^{(n-2)}(x) \end{bmatrix}_{3\times 3};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(n)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n+2)}(x) & F^{(n+1)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & F^{(n+1)}(x) & F^{(n)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \\ 0 & 0 & F^{(n-1)}(x) & F^{(n-2)}(x) \end{bmatrix}_{4\times 4};\ \overline{\overline{Q}}_5^{(n)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n+3)}(x) & F^{(n+2)}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^{(n+2)}(x) & F^{(n+1)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F^{(n+1)}(x) & F^{(n)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \\ 0 & 0 & 0 & F^{(n-1)}(x) & F^{(n-2)}(x) \end{bmatrix}_{5\times 5};$$

$$\overline{\overline{Q}}_m^{(n)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(m+n-2)}(x) & F^{(m+n-3)}(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F^{(m+n-3)}(x) & F^{(m+n-4)}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & F^{(m+n-4)}(x) & F^{(m+n-5)}(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & F^{(n-1)}(x) & F^{(n-2)}(x) \end{bmatrix}_{m\times m} \quad (12)$$

У цих виразів видно як здійснено розміщення елементів матриць Фібоначчі *m*-го порядку для їхньої *n*-ої послідовності, так і номери відповідних ідентифікаторів поліномів Фібоначчі, водночас як їхні степені будуть на одиницю менше. Наведена структура елементів *n*-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку має цікаву властивість, згідно з якою можна уникнути використання рекурентного матричного співвідношення (6), а генерувати відповідні матриці Фібоначчі тільки за номерами (*m*+*n*–2–*j*)-ої послідовності поліномів Фібоначчі (2), які дещо залежать від місця їхнього розташування в матриці та номера її стовпця, а саме $\forall j \in [0 \div (m-1)]$. Наприклад, якщо маємо згенерувати (n = 15)-ту послідовність поліноміальних матриць Фібоначчі (m = 10)-го порядку, то її елементами будуть поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до (m+n–2)-го, а саме: 15–2 = 13 і 10+15–2 = 23. Утворена поліноміальна матриця Фібоначчі міститиме таких різних поліномів Фібоначчі аж k_{10} = 10+1 = 11 шт., що значно більше, а ніж це було б для традиційної структури матриць Фібоначчі, наведених на (5).

Нижче наведено послідовності декількох перших поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі відповідно від 2-го до 5-го порядків, утворені рекурентним матричним співвідношенням (6), елементами яких будуть відповідні поліноми Фібоначчі не вище (m+n–2)-го номера, які повністю відповідатимуть номерам поліномів Фібоначчі з їхньої послідовності (2).

2.1. ***Алгоритм утворення послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі 2-го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі 2-го порядку, знаходження їхніх визначників і відповідно обчислення обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{-(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (13) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні номери поліноми Фібоначчі від (n–2)-го до n-го ($\forall n \in \{3 \div 8\}$), аналогічні їхній послідовності (2).

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)) = (-1)^n;\ \bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(n)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(0)}(x) = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)) = -1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x) = x\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)) = 1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) = x\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} -x & x^2+1 \\ x^2+1 & -x^3-2x \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x)) = -1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) = x\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(5)}(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & -x^3-2x \\ -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x)) = 1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) = x\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(6)}(x) = \begin{bmatrix} -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x)) = -1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) =$$

$$= x\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix}; \qquad (13)$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(7)}(x) = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \\ -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x)) = 1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(8)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) =$$

$$= x\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(8)}(x) = \begin{bmatrix} -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ x^6+5x^4+6x^2+1 & -x^7-6x^5-10x^3-4x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(8)}(x)) = -1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -x & x^2+1 \\ x^2+1 & -x^3-2x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x^3+2x)(-x)+(x^2+1)(x^2+1) & (x^3+2x)(x^2+1)+(x^2+1)(-x^3-2x) \\ (x^2+1)(-x)+x(x^2+1) & (x^2+1)(x^2+1)+x(-x^3-2x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для непарної поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_2^{(\cdot)}(\ldots)$-матриці Фібоначчі її визначник становить одиниця, а для парної – мінус одиниця, що повністю відповідає формулі (4), тобто тотожності Кассіні [23]. Водночас, всі обернені поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\cdot)}(\ldots)$-матриці Фібоначчі відповідають матричному виразу (8). Правильність отримання як поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі, так і їхніх обернених еквівалентів перевірена за допомогою матричного виразу (9), однак тепер вже для 4-ої поліноміальної матриці Фібоначчі (див. (13) – останній матричний вираз), внаслідок виконання якого отримано також одиничну матрицю.

2.2. ***Алгоритм утворення послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі 3-го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі 3-го порядку, знаходження їхніх визначників і відповідно обчислення обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі.

Для знаходження оберненої матриці 3-го порядку використовують такий матричний вираз [16]:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} ek-fh & ch-bk & bf-ce \\ fg-dk & ak-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix},\text{де}\ \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}=\frac{1}{aek+bfg+cdh-ceg-bdk-afh}. \qquad (14)$$

Наприклад, для 2-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 3-го порядку $\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)$ (див. матричні вирази (10)) її обернений еквівалент матиме такий вигляд:

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1};\ \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot x\cdot 0+x\cdot 1\cdot 0+0\cdot 0\cdot 1-0\cdot x\cdot 0-1\cdot 1\cdot (x^2+1)-0\cdot 0\cdot x}=-\frac{1}{x^2+1};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(\tau)}(x)=\begin{bmatrix} 1\cdot(x\cdot 0-1\cdot 1) & -1\cdot(x\cdot 0-0\cdot 1) & 1\cdot(x\cdot 1-0\cdot x) \\ -1\cdot(0\cdot 0-1\cdot 0) & 1\cdot((x^2+1)\cdot 0-0\cdot 0) & -1\cdot((x^2+1)\cdot 1-0\cdot 0) \\ 1\cdot(0\cdot 1-x\cdot 0) & -1\cdot((x^2+1)\cdot 1-x\cdot 0) & 1\cdot((x^2+1)\cdot x-x\cdot 0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -(x^2+1) \\ 0 & -(x^2+1) & x^3+x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x)=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(\tau)}(x)=-\frac{1}{x^2+1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -(x^2+1) \\ 0 & -(x^2+1) & x^3+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & 0 & \frac{-x}{x^2+1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix}.$$

З наведених матричних виразів (16) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до (m+n–2)-го ($\forall n\in\{3\div 8\}$), аналогічні їхній послідовності (2). Водночас, для n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі 3-го порядку її визначник можна отримати за такою формулою

$$\det(\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x))=(-1)^{n+1}F^{(n)}(x), \qquad (15)$$

тобто він є відповідним поліномом Фібоначчі (n–1)-го степеня, який враховує знак парності n, що зовсім відрізняється від формули (4). Всі обернені поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\cdot)}(\ldots)$-матриці Фібоначчі відповідають матричному виразу (14). Правильність отримання як поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі, так і їхніх обернених еквівалентів перевірена матричним виразом (16) для 2-ої поліноміальної матриці, внаслідок виконання якого отримано одиничну матрицю.

2.3. ***Алгоритм утворення послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі 4-го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_4^{(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі 4-го порядку, знаходження їхніх визначників і відповідно обчислення обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_4^{-(\cdot)}(\ldots)$-матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (17) і (17*) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_4^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до (m+n–2)-го ($\forall n\in\{3\div 8\}$), аналогічні їхній послідовності (2).

Оскільки тут маємо справу з матрицями Фібоначчі 4-го порядку, то для обчислення їхніх визначників доводиться використовувати спеціальні математичні методи [16]. Наприклад, шляхом рекурсивного обчислення визначників через пониження їхнього порядку, який називають розширенням Лапласа, за допомогою алгоритму Барейса (англ. *Bareiss algorithm*) чи формули Лейбніца (англ. *Leibniz formula*). Нагадаємо, алгоритм Е. Барейса призначений для знаходження визначника матриці з цілочисельними її елементами шляхом приведення її до ступінчастого вигляду за допомогою винятково цілочисельної

арифметики. Тут під цілочисельними елементами розуміють як числові, так і символьні значення елементів матриці, в т.ч. й математичні вирази.

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(n+1)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x))=(-1)^{n+1}F^{(n+1)}(x);\ \bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_3^{-(n)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(0)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-x\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}x&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\det(\bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x))=x;\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(1)}(x)=\begin{bmatrix}1/x&-1/x&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(0)}(x)=x\begin{bmatrix}x&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2&x&0\\0&x&0\\0&0&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x))=-(x^2+1);\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2+1}&0&\frac{-x}{x^2+1}\\0&0&1\\0&1&-x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x))=x^3+2x;\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x^2-1}{x^3+2x}&\frac{x^2+1}{x^2+2}\\0&1&-x\\0&-x&x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=x\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x))=-(x^4+3x^2+1);\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(4)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^4+2x^2}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^5-3x^2-2x}{x^4+3x^2+1}\\0&-x&x^2+1\\0&x^2+1&-x^3-2x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)=x\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(5)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^5+4x^3+3x}&\frac{-x^4-3x^2-1}{x^3+3x}&\frac{x^6+5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3}\\0&x^2+1&-x^3-2x\\0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x))=x^5+4x^3+3x;$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)=x\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x))=-(x^6+5x^4+6x^2+1);$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(6)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{x^8+6x^6+11x^4+6x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{-x^9-7x^7-16x^5-13x^3-3x}{x^6+5x^4+6x^2+1}\\0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&-x^5-4x^3-3x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)=x\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1&0\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};\qquad(16)$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(7)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x}&\frac{-x^{10}-8x^8-22x^6-24x^4-9x^2-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x}&\frac{x^{10}+9x^8+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4}\\0&x^4+3x^2+1&-x^5-4x^3-3x\\0&-x^5-4x^3-3x&x^6+5x^4+6x^2+1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x))=x^7+6x^5+10x^3+4x;$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(8)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)=$$

$$=x\begin{bmatrix}x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1&0\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1&x^7+6x^5+10x^3+4x&0\\0&x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(8)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1}&\frac{x^{10}+9x^8+28x^6+34x^4+12x^2}{x^6+6x^4+9x^2+1}&\frac{-x^{13}-11x^{11}-46x^9-91x^7-86x^5-34x^3-4x}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1}\\0&-x^5-4x^3-3x&x^6+5x^4+6x^2+1\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&-(x^7+6x^5+10x^3+4x)\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(8)}(x))=-(x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1).$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(n+1)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(n)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(n)}(x))=(-1)^{n+1}F^{(n+1)}(x);\ \bar{\bar{Q}}_4^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_4^{-(n)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(0)}(x)=\begin{bmatrix}x&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&-x\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(0)}(x))=-x;\ \bar{\bar{Q}}_4^{-(0)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}&\frac{-1}{x}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_4^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(1)}(x))=x^3+x;\ \bar{\bar{Q}}_4^{-(1)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2+1}&\frac{-1}{x^2+1}&\frac{1}{x^2+1}&0\\0&\frac{1}{x}&\frac{-1}{x}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(1)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(0)}(x)=x\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x))=-(x^5+3x^3+2x);\ \bar{\bar{Q}}_4^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-1}{x^3+2x}&0&\frac{1}{x^2+2}\\0&\frac{1}{x^2+1}&0&\frac{-x}{x^2+1}\\0&0&0&1\\0&0&1&-x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(3)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_4^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-1}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^3-x}{x^4+3x^2+1}\\0&\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x^2-1}{x^3+2x}&\frac{x^2+1}{x^2+2}\\0&0&1&-x\\0&0&-x&x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_4^{(3)}(x))=x^7+5x^5+7x^3+2x;$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(4)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(3)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)=x\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^5+4x^4+3x&x^4+3x^2+1&0&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_4^{-(4)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^5+4x^4+3x}&\frac{-1}{x^5+4x^4+3x}&\frac{-x^3-2x}{x^4+4x^3+3}&\frac{x^2+2}{x^3+3}\\0&\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^4+2x^2}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^5-3x^3-2x}{x^4+3x^2+1}\\0&0&-x&x^2+1\\0&0&x^2+1&-x^3-2x\end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_4^{(4)}(x))=-(x^9+7x^7+16x^5+13x^3+3x);$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(5)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(4)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(3)}(x)=x\begin{bmatrix}x^5+4x^4+3x&x^4+3x^2+1&0&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix};\qquad(17)$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(5)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{-1}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{x^6+4x^4+4x^2+1}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{-x^7-5x^5-7x^3-2x}{x^6+5x^4+6x^2+1}\\0&\frac{1}{x^5+4x^3+3x}&\frac{-x^4-3x^2-1}{x^3+3x}&\frac{x^6+5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3}\\0&0&x^2+1&-x^3-2x\\0&0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(5)}(x))=x^{11}+9x^9+29x^7+40x^5+22x^3+3x;$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(5)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(4)}(x)=x\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1&0&0\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x))=-(x^{13}+11x^{11}+46x^9+91x^7+86x^5+34x^3+4x);$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(6)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-x^5-4x^3-3x}{x^4+4x^2+2} & \frac{x^8+7x^6+16x^4+13x^2+3}{x^7+6x^5+10x^3+4x} \\ 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^8+6x^6+11x^4+6x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^9-7x^7-16x^5-13x^3-3x}{x^6+5x^4+6x^2+1} \\ 0 & 0 & -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(5)}(x)=x\begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0 & 0 \\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x))=x^{15}+13x^{13}+67x^{11}+174x^9+239x^7+166x^5+50x^3+4x;$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(7)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2+1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-x^9-8x^7-21x^5-19x^3-3x}{x^6+6x^4+9x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-x^{10}-8x^8-22x^6-24x^4-9x^2-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{x^{10}+9x^9+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4} \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \\ 0 & 0 & -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix}; \qquad (17^*)$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(8)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x)+\bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x)=x\begin{bmatrix} x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0 & 0 \\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0 \\ 0 & 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(8)}(x))=-(x^{17}+15x^{15}+92x^{13}+297x^{11}+541x^9+553x^7+296x^5+70x^3+5x);$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(8)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-x^{11}-10x^9-37x^7-62x^5-46x^3-12x}{x^8+8x^6+21x^4+20x^2+5} & \frac{x^{12}+11x^{10}+46x^8+91x^6+86x^4+34x^2+4}{x^8+8x^6+21x^4+20x^2+5} \\ 0 & \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-x^{10}-8x^8-22x^6-24x^4-9x^2-1}{x^6+6x^4+9x^2+1} & \frac{x^{10}+9x^9+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} \\ 0 & 0 & -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & -(x^7+6x^5+10x^3+4x) \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(n+1)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x)+\bar{\bar{Q}}_5^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x))=(-1)^{n-1}\cdot F^{(n+1)}(x);\ \bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_5^{-(n)}(x)=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(0)}(x)=\begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(0)}(x))=-(x^3+x);\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(0)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} & \frac{1}{x^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{-1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x)=\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(1)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^3+2x} & \frac{-1}{x^3+2x} & \frac{1}{x^3+2x} & \frac{-1}{x^3+2x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} & \frac{1}{x^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/x & -1/x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x))=x^6+3x^4+2x^2;$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x)+\bar{\bar{Q}}_5^{(0)}(x)=x\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^4+3x^2+1} & \frac{-1}{x^4+3x^2+1} & \frac{1}{x^4+3x^2+1} & 0 & \frac{-x}{x^4+3x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^3+2x} & \frac{-1}{x^3+2x} & 0 & \frac{1}{x^2+2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2+1} & 0 & \frac{-x}{x^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x))=-(x^9+6x^7+12x^5+9x^3+2x);$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x)=$$

$$=x\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-1}{x^3+3x} & \frac{1}{x^2+3} \\ 0 & \frac{1}{x^4+3x^2+1} & \frac{-1}{x^4+3x^2+1} & \frac{1}{x^2+1} & \frac{-x^3-x}{x^4+3x^2+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^3+2x} & \frac{-x^2-1}{x^3+2x} & \frac{x^2+1}{x^2+2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-x}{x^2+2} \\ 0 & 0 & 0 & -x & x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x))=x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+29x^4+6x^2;$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x)+\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)=x\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix}; \qquad (18)$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{-(4)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^4+2x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-(x^5+3x^3+2x)}{x^6+5x^4+6x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-(x^3+2x)}{x^4+4x^2+3} & \frac{x^2+2}{x^2+3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^4+3x^2+1} & \frac{-x^2-1}{x^4+3x^2+1} & \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & -x & x^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & -(x^2+2x) \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x))=-(x^{15}+12x^{13}+57x^{11}+136x^9+171x^7+109x^5+31x^3+3x);$$

$$\bar{\bar{Q}}^{(5)}(x)=x\bar{\bar{Q}}^{(4)}(x)+\bar{\bar{Q}}^{(3)}(x)=x\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & x\\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x\\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix};\bar{\bar{Q}}^{-(5)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-(x^6+4x^4+4x^2+1)}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{x^4+3x^2+1}{x^4+4x^2+2}\\ 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^6+4x^4+4x^2+1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-(x^7+5x^5+7x^3+2x)}{x^6+5x^4+6x^2+1}\\ 0 & 0 & \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-(x^4+3x^2+1)}{x^3+3x} & \frac{x^6+5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{x^2+1}{-(x^3+2x)} & \frac{-(x^3+2x)}{x^4+3x^2+1} \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}^{(5)}(x))=x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+398x^6+118x^4+12x^2;$$

$$\bar{\bar{Q}}^{(6)}(x)=x\bar{\bar{Q}}^{(5)}(x)+\bar{\bar{Q}}^{(4)}(x)=x\begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^3+3x^2+1 & x^3+2x\\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & x \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0\\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x\\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}^{-(6)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{x^6+5x^4+6x^2}{x^6+6x^4+9x^2+1} & \frac{-(x^7+6x^5+10x^3+3x)}{x^6+6x^4+9x^2+1}\\ 0 & \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-(x^5+4x^3+3x)}{x^4+4x^2+2} & \frac{x^8+7x^6+16x^4+13x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^8+6x^6+11x^4+6x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-(x^9+7x^7+16x^5+13x^3+3x)}{x^6+5x^4+6x^2+1}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(x^3+2x)}{x^4+3x^2+1} & \frac{x^4+3x^2+1}{-(x^5+4x^3+3x)}\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -(x^5+4x^3+3x) \end{bmatrix};\qquad (18^*)$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}^{(6)}(x))=-(x^{21}+18x^{19}+138x^{17}+588x^{15}+1524x^{13}+2472x^{11}+2488x^9+1489x^7+486x^5+74x^3+4x);$$

$$\bar{\bar{Q}}^{(7)}(x)=x\bar{\bar{Q}}^{(6)}(x)+\bar{\bar{Q}}^{(5)}(x)=x\begin{bmatrix} x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x\\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0\\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x\\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}^{(7)}(x))=x^{24}+21x^{22}+192x^{20}+1003x^{18}+3303x^{16}+7137x^{14}+10212x^{12}+9540x^{10}+5597x^8+1914x^6+330x^4+20x^2;$$

$$\bar{\bar{Q}}^{-(7)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-(x^6+5x^4+6x^2+1)}{x^5+5x^3+5x} & \frac{x^{10}+9x^8+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^8+8x^6+21x^4+20x^2+5}\\ 0 & \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2+1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{-(x^9+8x^7+21x^5+19x^3-3x)}{x^6+6x^4+9x^2+1}\\ 0 & 0 & \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-(x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2+1)}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{x^{10}+9x^8+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4}\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -(x^5+4x^3+3x)\\ 0 & 0 & 0 & -(x^5+4x^3+3x) & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}^{(8)}(x)=x\bar{\bar{Q}}^{(7)}(x)+\bar{\bar{Q}}^{(6)}(x)=x\begin{bmatrix} x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0\\ 0 & 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x\\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix}=\qquad (18^{**})$$

$$=\begin{bmatrix} x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1 & x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1 & x^7+6x^5+10x^3+4x & 0\\ 0 & 0 & 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}^{-(8)}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1} & \frac{-1}{x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1} & \frac{1}{x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1} & \frac{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2}{x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1} & \frac{-(x^{13}+11x^{11}+46x^9+91x^7+86x^5+34x^3+4x)}{x^{10}+9x^8+28x^6+35x^4+15x^2+1}\\ 0 & \frac{1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-1}{x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x} & \frac{-(x^{11}+10x^9+37x^7+62x^5+46x^3+12x)}{x^8+8x^6+21x^4+20x^2+5} & \frac{x^{12}+11x^{10}+46x^8+91x^6+86x^4+34x^2+4}{x^8+8x^6+21x^4+20x^2+5}\\ 0 & 0 & \frac{1}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1} & \frac{x^{10}+9x^8+28x^6+34x^4+12x^2}{x^6+6x^4+9x^2+1} & \frac{-(x^{13}+11x^{11}+46x^9+91x^7+86x^5+34x^3+4x)}{x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1}\\ 0 & 0 & 0 & -(x^5+4x^3+3x) & x^6+5x^4+6x^2+1\\ 0 & 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & -(x^7+6x^5+10x^3+4x) \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}^{(8)}(x))=-(x^{27}+24x^{25}+255x^{23}+1580x^{21}+6330x^{19}+17184x^{17}+32211x^{15}+41700x^{13}+36690x^{11}+21201x^9+7583x^7+1521x^5+145x^3+5x).$$

Будь-яке ділення, що виконує алгоритм, гарантує точне ділення без залишку. Алгоритм можна використати для знаходження визначника матриці з (приблизними) дійсними елементами, що унеможливлює помилки округлення, за винятком помилок, що вже присутні у вхідних даних.

Для обчислення оберненої поліноміальної матриці Фібоначчі 4-го і більших порядків також доводиться використовувати відповідні математичні методи [16], такі як метод Монтанте, метод елімінації Гауса-Джордана (англ. *Gauss-Jordan elimination*), а також за допомогою ад'югованої матриці (англ. *Adjugate matrix*). Наприклад, метод лінійної алгебри Монтанте призначений для розв'язання системи лінійних рівнянь, знаходження визначників та обчислення обернених матриць. Метод названо в честь його першовідкривача Рене Маріо Монтанте Пардо (англ. *Rene Mario Montante Pardo*). Його головна особливість – працює, використовуючи винятково цілочисельну арифметику для цілочисельних чи символьних матриць, що дає змогу отримувати точні результати в комп'ютерних реалізаціях.

Всі зазначені вище методи та алгоритми знаходження як визначників, так і обчислення обернених матриць, в т.ч. й матриць Фібоначчі, детально описано в мережі Інтернет, тому в цьому дослідженні не будемо зосереджувати увагу на їхній роботі.

2.4. ***Алгоритм утворення послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі* 5-*го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\overline{\overline{Q}}_{5}^{(\cdot\ ,\ldots,\ )}$-матриць Фібоначчі 5-го порядку, знаходження їхніх визначників і відповідно обчислення обернених поліноміальних $\overline{\overline{Q}}_{5}^{-(\cdot\ ,\ldots,\ )}$-матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (18), (18*) і (18**) видно, що елементами *n*-ої поліноміальної $\overline{\overline{Q}}_{5}^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі з номерами від (*n*–2)-го до (*m*+*n*–2)-го ($\forall n \in \{3 \div 8\}$), аналогічні їхній послідовності (2). Оскільки тут маємо справу з матрицями Фібоначчі 5-го порядку, то для знаходження їхніх визначників і обчислення обернених матриць доводиться використовувати спеціальні математичні методи [16].

Отже, розроблено метод генерування послідовності з *n*-ої кількості уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі з номерами від (*n*–2)-го до (*m*+*n*–2)-го ($\forall n \in \{3 \div m\}$). Оскільки поліноміальні матриці Фібоначчі часто використовують для реалізації операцій шифрування даних, то для розшифрування даних також потрібно мати аналогічні поліноміальні оберненні матриці, для отримання яких потрібно застосувати загальний підхід. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати не тільки послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, але й знаходити їхні визначники та обчислювати обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку.

Під час розроблення ПЗ виникли проблеми чисто математичного характеру. Справа в тому, що навіть під час генерування 5-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 2-го порядку отримуємо поліноми 4-го степеня, утворені внаслідок множення змінної *x* на 4-ту поліноміальну матрицю, та додати 3-ту матрицю, де знаходяться поліноми дещо нижчих степенів. Для їх правильного подання доводиться спочатку перемножувати відповідні поліноми нижчих степенів, потім отриманий результат треба додати і спростити. Інша проблема, це знаходження визначників матриць, починаючи з 4-го та вищих порядків, де доводиться використовувати спеціальні математичні методи [16], наприклад алгоритм Барейса (англ. *Bareiss algorithm*) чи формулу Лейбніца (англ. *Leibniz formula*). Наступна математична проблема, це обчислення оберненої матриці, для вирішення якої також доводиться використовувати відповідні математичні методи [16], такі як метод Монтанте (англ. *Montante method*), метод елімінації Гауса-Джордана (англ. *Gauss-Jordan elimination*) та за допомогою ад'югованої матриці (англ. *Adjugate matrix*). І остання проблема – уважність запису *n*-ої поліноміальної матриці Фібоначчі *m*-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі не вище (*m*+*n*–2)-го номера, насамперед тих, які стосуються матриць вищих порядків і поліномів більших степенів. Адже запис не того степеня змінної, неправильного значення коефіцієнта при ній чи його знаку – подальша робота буде даремною.

3. Метод шифрування блокових даних поліноміальними матрицями Фібоначчі. Розглянемо особливості реалізації матричного методу шифрування даних поліноміальними матрицями Фібоначчі *m*-го порядку [14, 22, 27]. Щоб використовувати цей метод, початкове повідомлення потрібно подати у вигляді квадратної $\overline{\overline{M}}$-матриці *m*-го порядку, яку називають *матрицею повідомлення*. Немає обмежень щодо подання такого повідомлення [7], тому користувачеві залишається визначати розташування елементів повідомлення у матриці – рядками чи стовпцями. Наприклад, вхідне повідомлення "*Cryptographickey*" подамо матрицею 4-го порядку, заповнюючи її поелементно рядками, паралельно вказуючи їхні числові значення згідно з таблицею кодів символів ASCII:

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} C & r & y & p \\ t & o & g & r \\ a & p & h & i \\ c & k & e & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 67 & 114 & 121 & 112 \\ 116 & 111 & 103 & 114 \\ 97 & 112 & 104 & 105 \\ 99 & 107 & 101 & 121 \end{bmatrix}.$$

Після узгодження між відправником і одержувачем цілого числа $x \neq 0$ та *n*-ої поліноміальної матриці Фібоначчі *m*-го порядку, відповідну матрицю шифрування даних вибирають з виразів (13), (16), (17) чи (18),

наведених вище. Потім цю матрицю потрібно помножити справа на матрицю повідомлення $\overline{\overline{M}}$, щоб отримати матрицю зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$. Наприклад, для $m = 3$, $n = 3$ та $x = 4$ маємо:

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix}; \overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(4) = \begin{bmatrix} 305 & 72 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(4) \times \overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 305 & 72 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 67 & 114 & 121 & 112 \\ 116 & 111 & 103 & 114 \\ 97 & 112 & 104 & 105 \\ 99 & 107 & 101 & 121 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28787 & 42762 & 44321 & 42368 \\ 10001 & 9896 & 9184 & 9993 \\ 2045 & 2332 & 2172 & 2269 \\ 487 & 555 & 517 & 541 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$ надсилають каналом зв'язку рядками в порядку $e_1, e_2, ..., e_9$, за якими слідує окремо значення її визначника

$$\det(\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x)) = x^7 + 5x^5 + 7x^3 + 2x; \det(\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(4)) = 4^7 + 5 \cdot 4^5 + 7 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 = 21960.$$

Припускаючи, що передана послідовність чисел отримана без помилок, тоді, шляхом множення оберненої $\overline{\overline{Q}}_4^{-(3)}(x)$-матриці Фібоначчі на матрицю зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$, отримують початкову матрицю повідомлення, а саме:

$$\overline{\overline{Q}}_4^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^4+3x^2+1} & \frac{-1}{x^4+3x^2+1} & \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1} & \frac{-x^3-x}{x^4+3x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^3+2x} & \frac{-x^2-1}{x^3+2x} & \frac{x^2+1}{x^2+2} \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & -x & x^2+1 \end{bmatrix}; \overline{\overline{Q}}_4^{-(3)}(4) = \begin{bmatrix} 0,00328 & -0,00328 & 0,05574 & -0,22295 \\ 0 & 0,01389 & -0,23611 & 0,94444 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{bmatrix}$$

.

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{Q}}_4^{-(3)}(4) \times \overline{\overline{E}} = \begin{bmatrix} 0,00328 & -0,00328 & 0,05574 & -0,22295 \\ 0 & 0,01389 & -0,23611 & 0,94444 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 17 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 28787 & 42762 & 44321 & 42368 \\ 10001 & 9896 & 9184 & 9993 \\ 2045 & 2332 & 2172 & 2269 \\ 487 & 555 & 517 & 541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 114 & 121 & 112 \\ 116 & 111 & 103 & 114 \\ 97 & 112 & 104 & 105 \\ 99 & 107 & 101 & 121 \end{bmatrix}$$

.

З огляду на викладене вище, констатуємо факт використання матричного методу шифрування даних на підставі поліноміальної матриці Фібоначчі, в якому для матриці вхідного повідомлення над алфавітом {0, 1,..., 255} і для цілого числа $x = 4$ використано $\overline{\overline{Q}}^{(3)}(4)$-матрицю Фібоначчі 4-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі від 1-го до 5-го номера (2). Для отримання визначника матриці використано формулу Лейбніца, а для знаходження оберненої матриці застосовано метод Монтанте (англ. *Montante method*).

Отже, показана можливість вирішення проблеми генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі з номерами від $(n–2)$-го до $(m+n–2)$-го, який, на відміну від відомих методів, використовує матричне рекурентне співвідношення, аналогічне рекурентному співвідношенню для генерування чисел Фібоначчі, а за отриманими матрицями можна знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці відповідного порядку. На конкретному прикладі показана особливість застосування матричного методу шифрування блокових даних з використанням 3-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 4-го порядку.

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У математиці поліноміальні матриці Фібоначчі – це поліноміальна послідовність матриць різного порядку, елементами яких є відповідні поліноми Фібоначчі з певної їхньої послідовності [36]. Водночас, різні результати дослідження послідовностей таких поліноміальних матриць під загальною назвою поліноміальні матриці Фібоначчі трапляються в науковій літературі хоча і давно, позаяк тісно пов'язані між собою, проте вони не так широко досліджені, як відповідні послідовності поліномів Фібоначчі. Застосування ж таких поліноміальних матриць з'являється в різних областях знань, в тому числі й для шифрування блокових даних, насамперед матричним методом.

У роботі [1] наведено нові результати для двох узагальнених класів поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також особливості їх використання у скороченні деяких радикалів. Автори вважають, що вони розробили нові формули для обчислення зв'язків між двома узагальненими класами поліномів Фібоначчі та Лукаса. Вказано, що гіпергеометричні функції виду ${}_2F_1(z)$ входять до всіх коефіцієнтів зв'язку для конкретного значення z. Декілька нових формул зв'язку між деякими відомими поліномами, такими як поліноми Фібоначчі, Лукаса, Пелла, Ферма, Пелля–Лукаса та Ферма–Лукаса, вони вивели як окремі випадки похідних формул зв'язку.

Деякі з наведених авторами формул також узагальнюють деякі з відомих у наявній літературі. Як можливість застосування двох похідних формул зв'язку наведено деякі нові формули, що зв'язують деякі відомі числа, а також виведено нові формули для певних зважених інтегралів. На підставі використання двох узагальнених класів поліномів Фібоначчі та Лукаса розроблено нові формули зведення деяких парних і непарних радикалів.

У роботі [37] розглянуто алгоритм перетворення Каталона для послідовності *k*-Пелла, послідовності *k*-Пелла–Лукаса та модифікованої послідовності *k*-Пелла, а також досліджено властивості цих послідовностей. Автори застосовували перетворення Ганкеля (англ. *Hankel Transform*) до перетворень Каталана для зазначених послідовностей. Також вони отримали породжувальні функції перетворення Каталана для відповідних послідовностей, а також цікаву характеристику, пов'язану з детермінантом перетворення Ганкеля цих послідовностей.

У роботі [11] наведено поліноміальні матриці Фібоначчі–Гессенберга з визначником у вигляді модифікованого полінома Фібоначчі. Авторами введено поняття двовимірного масиву поліномів Фібоначчі та наведено три класи поліноміальних матриць Фібоначчі–Гессенберга, що задовольняють їхнім властивостям.

У роботі [17] наведено тотожності Фібоначчі та Лукаса, отримані з матриць Тепліца–Гессенберга. Автори розглянули визначники для деяких сімейств матриць Тепліца–Гессенберга, що мають різні подання чисел Фібоначчі та Лукаса для ненульових елементів. Формули цих визначників можна також подати як тотожності, що містять суми добутків чисел Фібоначчі та Лукаса, а також їхніх мультиноміальних коефіцієнтів. У дослідженні наведено результат комбінаторного доведення декількох визначників, які використовують знакозмінні інволюції та визначення визначника як суми зі знаком над симетричною групою. Це призвело до загального узагальнення формул Фібоначчі та Лукаса в термінах так званих чисел Гібоначчі.

У роботі [40] розглянуто особливості побудови узагальнених поліномів Гумберта, отримані через узагальнені поліноми Фібоначчі. Автори визначили так звані узагальнені (p,q)-поліноми Фібоначчі $u_{n,m}(x)$ і узагальнені (p,q)-поліноми Лукаса $v_{n,m}(x)$, а також ввели узагальнені поліноми Гумберта $u_{n,m}^{(r)}(x)$ як окремі згортки $u_{n,m}(x)$. Також дослідники навели багато виразів, їхніх розкладів, рекурентних співвідношень, в т.ч. й диференціальних, що дало їм змогу вивчати матриці Фібоначчі та їхні визначники, пов'язані з поліномами $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ та $u_{n,m}^{(r)}(x)$. Автори запропонували алгебричну інтерпретацію для узагальнених поліномів Гумберта $u_{n,m}^{(r)}(x)$, де було вказано, що різні добре відомі поліноми Фібоначчі є окремими випадками узагальнених поліномів $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ або $u_{n,m}^{(r)}(x)$. Ввівши узагальнені поліноми $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ і $u_{n,m}^{(r)}(x)$, автори отримали єдиний підхід до роботи з багатьма спеціальними поліномами, відомими в наявній літературі.

У роботі [26] наведено новий метод шифрування даних з використанням Q-матриць Фібоначчі, заснований на матрицях заблокованих повідомлень. Головною перевагою такого методу є шифрування кожної матриці вхідного повідомлення ключами різної величини [23]. Як стверджують автори, такий підхід не тільки підвищує безпеку зашифрованих повідомлень від криптографічних атак [19, 21], але й має високу коригувальну здатність, однак не вказують, чим саме чи як саме це забезпечується.

У роботі [8] запропоновано нову теорію шифрування даних з використанням m-розширення p-чисел Фібоначчі. Автори навели квадратну $G_{p,m}$-матрицю Фібоначчі, де $p \geq 0$ є цілим невід'ємним числом і $m>0$. Також описали різні властивості $G_{p,m}$-матриці, яка є основою теорії шифрування даних, встановили зв'язки між елементами цієї матриці для різних значень p і m. Вони показали, що співвідношення між елементами $G_{p,m}$-матриці для різних значень p і $m = 1$ збігаються з відношенням між елементами матриці шифрування для різних значень числа p [6]. Загалом, достовірність запропонованого методу зростає зі збільшенням цього значення, але вона не залежить від значення m.

У роботі [6] розроблено узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних числами Фібоначчі. Автори розглядали клас квадратної матриці Фібоначчі (p+1)-порядку, елементи якої базуються на p-числах Фібоначчі з визначником, що становить ±1. Вони стверджують, що існує зв'язок між числами Фібоначчі з початковими членами, який відомий як формула Кассіні. Було встановлено, що послідовність чисел Фібоначчі та золотий переріз мають важливе значення під час побудови відносно нової теорії простору-часу, яка відома як E-теорія нескінченності. Оригінальний метод шифрування даних числами Фібоначчі випливає з аналогічних матриць, де відомим залишається зв'язок між її елементами для випадку $p = 1$ [36]. Також автори встановили узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних для різних значень p. Наприклад, для $p = 2$ достовірність запропонованого методу становить 99,80 % і зростає зі збільшенням цього значення.

У роботі [36] розроблено p-матрицю Фібоначчі, наведено узагальнення формули Кассіні та нову теорію шифрування даних. Автори розглядали новий клас квадратних матриць Фібоначчі розміром (p+1)×(p+1), елементами яких є p-числа Фібоначчі (p = 0, 1, 2, 3, …), а їхній визначник становить ±1. Ця унікальна властивість матриць Фібоначчі приводить до узагальнення формули Кассіні. Запропонований оригінальний метод шифрування даних числами та матрицями Фібоначчі випливає з аналогічних матриць n-порядку. На відміну від класичних надлишкових кодів, основною особливістю запропонованого методу є те,

що він дає змогу коригувати зашифровані елементи матриці у випадку втрати їхніх значень під час передачі каналами зв'язку, які теоретично можуть бути необмеженими цілими числами. Для найпростішого випадку коригувальна здатність цього методу становить 93,33 %, що значно перевищує відомі коригувальні можливості інших методів.

У роботі [13] наведено новий клас кодів з можливістю виправлення помилок на підставі послідовності чисел Фібоначчі. Запропоновано клас квадратних M_p^n-матриць *n*-го степеня *p*-го порядку для шифрування даних і запропоновано методику контролю за появою помилок. Це значно розширює результати попередніх досліджень [36] щодо методів коригування помилок, виникнення яких зумовлене передачею каналами зв'язку зашифрованих повідомлень. Автори вважають, що для цілого числа *p* можна згенерувати двійкову M_p^n-матрицю *n*-го степеня розміром (*p*+1)×(*p*+1), ненульові елементи якої розташовані або на супердіагоналі, або в останньому рядку матриці. Звичайну M_p^n- та обернену M_p^{-n}-матриці *n*-го ступеня використовують як матриці шифрування та дешифрування даних відповідно. Також вони показали, що для достатньо великих значень *n*, незалежно від значень елементів матриці повідомлення M_p, між елементами зашифрованої матриці існують зв'язки $E_p = M_p \times M_p^n$. Ці відносини мають важливе значення під час виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях.

У роботі [30] розглянуто узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних і вхідним повідомленням, запропоновано нову комплексну $H_{p,n}$-матрицю Фібоначчі, елементами якої є відповідні числа Фібоначчі. Розроблено метод шифрування даних, що випливає з цієї комплексної $H_{p,n}$-матриці Фібоначчі, а також встановлено зв'язки між її елементами. Запропоновано підхід до виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях, що ґрунтується на потребі розв'язування діофантових рівнянь.

У роботі [14] розроблено метод шифрування даних на підставі поліномів Фібоначчі з можливістю виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях. Для цілих чисел $m \geq 2$, $x \geq 1$ і $n \geq 1$ розроблено Q_m^n-матрицю *n*-го степеня розміром $m \geq m$, яку названо $Q_m^n(x)$-матрицю шифрування даних, елементами якої є поліноми Фібоначчі. Для дешифрування даних автори наводять обернену $Q_m^{-n}(x)$-матрицю, особливість якої у тому, що їхній визначник становить ±1. Наведено простий критерій виявлення помилок і відповідний метод їх виправлення для цього класу матриць. Також показано, що ймовірність появи помилок у зашифрованих повідомленнях майже нульова за досить великих значень *m*. Наведено наочні приклади шифрування даних, а також різні випадки виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях.

У роботі [12] розроблено новий метод шифрування даних на підставі поліномів Фібоначчі з високою швидкістю їх генерування. Для цілих чисел *m*, *n* і $x \geq 1$ можна згенерувати квадратну $Q_{2m}^n(x)$-матрицю *n*-го степеня 2*m*-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі, і відповідну обернену $Q_{2m}^{-n}(x)$-матрицю для їх дешифрування [23]. Також показано, що швидкість шифрування даних за допомогою цих матриць значно вища, ніж з оригінальними матрицями на підставі звичайних чисел Фібоначчі.

У роботі [28] запропоновано нову теорію шифрування даних на (*h*(*x*), *g*(*y*))-розширенні поліномів *p*-числами Фібоначчі. Визначено також золоті (*p*, *h*(*x*), *g*(*y*))-пропорції, де $p \geq 0$ – цілі числа, $h(x) > 0$, $g(y) > 0$ – поліноми з дійсними коефіцієнтами. Встановлено, що співвідношення між елементами квадратної $G_{p,h,g}$-матриці Фібоначчі повністю збігаються зі співвідношеннями між елементами матриці шифрування для різних значень *p* і поліномів $h(x) = m$ і $g(y) = t$ [9]. Також співвідношення між елементами матриці шифрування для поліномів $h(x) = 1$ і $g(y) = 1$ збігаються з узагальненими співвідношеннями між елементами матриці шифрування числами Фібоначчі [6]. Завдяки відповідному вибору початкових членів у (*h*(*x*), *g*(*y*))-розширенні поліномів *p*-числами Фібоначчі квадратну $G_{p,h,g}$-матрицю можна застосувати для шифрування даних різної величини. Під час обговорення результатів дослідження автори стверджують, що достовірність їхнього методу зростає зі збільшенням значення *p*, але вона не залежить від значень поліномів *h*(*x*) і *g*(*y*), які значно підвищують криптографічну стійкість зашифрованих повідомлень [18]. Встановлено, що складність цього методу зростає зі збільшенням степеня поліномів *h*(*x*) і *g*(*y*). Також знайдено зв'язок між золотою (*p*, *h*(*x*), *g*(*y*))-пропорцією, між золотою (*p*, *h*(*x*))-пропорцією та між золотою *p*-пропорцією.

У роботі [31] розглянуто особливості реалізації криптографічних перетворень з використанням узагальнених матриць Фібоначчі з Афінним шифром Хілла. Автори запропонували криптографію з відкритим ключем із використанням Афінного шифру Хілла та узагальненої матриці Фібоначчі, яку ще називають матрицею мультиначчі (англ. *Multinacci Matrix*). Також запропоновано схему встановлення ключа (обміну матрицею ключів $K = Q_\lambda^k$ порядку λ×λ для шифрування-дешифрування) за допомогою послідовностей матриць мультиначчі під простим модулем. У цій схемі замість обміну матрицею ключів потрібно обмінятися тільки парою чисел (λ, *k*), що зменшує часову складність передачі даних, а також складність простору обміну ключами та забезпечує великий простір їхнього генерування.

У роботі [10] розглянуто особливості супершифрування даних з матрицями та графіками Пелла-Лукаса через перетворення Лапласа. Автори пропонують новий метод шифрування даних під назвою багатофазне шифрування (англ. *Multiphase Encryption*). Цей метод шифрує вхідні дані декілька разів за допомогою різних потужних алгоритмів шифрування на кожному етапі. Метод багатофазного шифрування використовує властивості дерев теорії графів, матриць Пелла-Лукаса та шифру Віженера, що значно підвищує криптографічну стійкість алгоритму шифрування. Нову методику супершифрування даних з використанням перетворень Лапласа через числа Фібоначчі, використовуючи властивості дерев теорії графів за допомогою шифру Бофорта (англ. *Beaufort Cipher*), часто застосовують для шифрування простого тексту, який є більш безпечним, ніж симетрична криптосистема, оскільки звичайний текст можна зашифрувати у багато шарів.

У роботі [41] розглянуто алгоритми симетричного шифрування даних у поліноміальній системі числення залишків. Автори вперше розробили теоретичні положення щодо реалізації симетричних криптографічних алгоритмів на підставі поліноміальної системи числення залишків RNS (англ. *Residue Numeral System*). Основною особливістю запропонованого підходу є те, що при відновленні полінома за методом невизначених коефіцієнтів (англ. *Method of Undetermined Coefficients*) операцію множення виконують не на знайдених базисних числах, а на довільно вибраних поліномах. такі поліноми разом із попарно взаємно простими залишками системи класів залишків (англ. *Residue Class System*) слугують ключами криптографічного алгоритму. Наведено схеми та приклади реалізації розробленого поліноміального симетричного алгоритму шифрування даних. Побудовано аналітичні вирази для оцінювання криптографічної стійкості алгоритму та наведено їх графічну залежність від кількості модулів і степенів полінома. Результати дослідження показують, що криптоаналіз запропонованого алгоритму має комбінаторну складність, що призводить до вирішення NP-повної задачі.

Проаналізовані роботи стосовно наявних підходів до генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі різних модифікацій, а також можливостей їхнього використання для шифрування блокових даних вказали на те, що дослідниками виконано багато різноманітних робіт, у кожній з яких тією чи іншою мірою обґрунтовано різні підходи до їхнього генерування, проте не наведено приклади їхнього конкретного вигляду, однак доведено доцільність їх використання для шифрування блокових даних. Водночас було з'ясовано, що як окрему процедуру захисту блокових даних поліноміальними матрицями Фібоначчі навіть різної модифікацій в теорії та практиці криптографії практично не використовують. Тому проведене нами дослідження щодо розроблення ефективного методу генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, наведення робочих прикладів їхнього конкретного вигляду, а також встановлення певних особливостей їхнього використання для шифрування блокових даних тільки як локального методу є частковим вирішенням цієї актуальної проблеми, що й було продемонстровано в цьому дослідженні.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено метод генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, структура елементів яких містить m+1 поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до (m+n–2)-го, який, на відміну від відомих методів, використовує матричне рекурентне співвідношення, аналогічне рекурентному співвідношенню для генерування чисел Фібоначчі, а за отриманими матрицями Фібоначчі можна знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці відповідного порядку.

Практична значущість результатів дослідження – розроблений метод генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі відповідних номерів, а також запропоновані методи знаходження їхніх визначників і обернених матриць можна застосовувати в матричному методі шифрування блокових даних, що загалом дасть змогу ефективно передавати каналами зв'язку блокові повідомлення різної величини.

ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Розроблено метод генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до (m+n–2)-го, який дає можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, придатні для матричного методу шифрування блокових даних. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проаналізовано останні дослідження та публікації, внаслідок чого з'ясовано складність проблеми генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку як основу для шифрування блокових даних, що дасть змогу здійснювати ефективний їх захист. З'ясовано, що навіть за останнє десятиліття надруковано значну кількість публікацій, в кожній з яких обґрунтовано різні підходи як до генерування послідовностей таких поліноміальних матриць Фібоначчі, так і доведено доцільність їх використання для шифрування блокових даних. Водночас, застосування поліноміальних матриць Фібоначчі як окремої процедури для захисту блокових даних у теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко.

2. Проведений аналіз послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до 5-го порядків показав, що традиційний підхід до формування структури елементів таких матриць має деякі недоліки, один з яких стосується кількості (k) різних її елементів, якими є поліноми Фібоначчі не вище (n–1)-го степеня. Наприклад, для матриць Фібоначчі будь-якого порядку (m) таких різних поліномів Фібоначчі буде всього k = 3, структура яких залежатиме тільки від номера (n) послідовності поліноміальної матриці Фібоначчі. Така незначна їх кількість є не тільки малоінформативною та прозорою для криптоаналітика, але й не стійкою щодо криптоаналізу. Було прийнято рішення щодо уточнення структури елементів поліноміальних матриць Фібоначчі, кількість яких мала б залежати насамперед від їхнього порядку, а саме $k = m+1$.

3. Розроблено метод генерування n-ої послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до ($m+n$–2)-го, який дає можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, які можна застосувати у матричному методі шифрування блокових даних. Встановлено, що метод генерування послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі полягає у використанні рекурентного матричного співвідношення, згідно з яким наступну поліноміальну матрицю утворюють шляхом множення змінної x послідовно на елементи поточної матриці, якими є відповідні поліноми Фібоначчі, додавання елементів утвореної матриці до елементів попередньої матриці, після чого у кожному з її утворених елементів групують усі схожі доданки.

4. Наведено механізми утворення послідовності з 8-ми поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до і 5-го порядків, елементами яких стали поліноми Фібоначчі з номерами від (n–2)-го до ($m+n$–2)-го ($\forall n \in \{3 \div 8\}$), що дало змогу проаналізувати не тільки особливості їхньої побудови загалом, але й усвідомити процедури знаходження їхніх визначників і обернених матриць зокрема. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати як послідовності уточнених поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, так і знаходити їхні визначники та обчислювати обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку.

5. Виявлено, що запропонована структура елементів n-ої послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку має цікаву властивість, згідно з якою можна уникнути використання рекурентного матричного співвідношення, а генерувати відповідні поліноміальні матриці Фібоначчі тільки за номерами ($m+n$–2–j)-ої послідовності поліномів Фібоначчі, конкретні значення яких залежать від місця їхнього розташування в матриці та номера її стовпця, а саме $\forall j \in [0 \div (m-1)]$.

6. Наведено приклад застосування матричного методу шифрування блокових даних уточненою поліноміальною матрицею Фібоначчі, що дає змогу зацікавленому читачу зрозуміти основний принцип шифрування як початкового повідомлення, так і розшифрування зашифрованих даних. У наведеному прикладі для матриці вхідного повідомлення над алфавітом {0, 1,..., 255} і для цілого числа x = 4 використано 3-ту поліноміальну матрицю Фібоначчі 4-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі від 1-го до 5-го номера. Для знаходження визначника матриці використано алгоритм Барейса (англ. *Bareiss algorithm*), а для обчислення оберненої матриці застосовано метод Монтанте (англ. *Montante method*).

7. За результатами виконаного дослідження зроблено обґрунтовані висновки та надано відповідні рекомендації щодо їх практичного використання як основи для шифрування блокових даних, що дає змогу ефективно передавати каналами зв'язку відповідні повідомлення різної величини.

References

1. Abd-Elhameed, Waleed Mohamed, Philippou, Andreas N., & Zeyada, Nasr Anwer. (2022). Novel Results for Two Generalized Classes of Fibonacci and Lucas Polynomials and Their Uses in the Reduction of Some Radicals. *Mathematics*, 10(7), article ID 2342. https://doi.org/10.3390/math10132342
2. Asci, M., & Tasci, D. (2007). On Fibonacci, Lucas and special orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2007.01.026
3. Ashok, G., Ashok Kumar, S., Chaya Kumari, D., & Ramakrishna, M. (2022). A type of public cryptosystem using polynomials and pell sequences. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(7), 1951–1963. https://doi.org/10.1080/09720529.2022.2133237
4. Ashok, Gudela, Sadasivuni, Ashok Kumar, & Kumari, Dushma. (2023, August). An Approach of Cryptosystem using Polynomials and Lucas Numbers. *Journal of Harbin Engineering University*, 44(8), 25–31. URL: https://www.researchgate.net/publication/372991199_An_Approach_of_Cryptosystem_using_Polynomials_and_Lucas_Numbers
5. Basin, S. L. (1963). The Appearance of Fibonacci Numbers and the Q Matrix in Electrical Network Theory. *Mathematics Magazine*, 36(2), 84–97. https://doi.org/10.2307/2688890
6. Basu, M., & Prasad, B. (2009). The Generalized relations among the code elements for Fibonacci coding theory. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 41, issue 5, 2517–2525. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.030
7. Basu, Manjusri, & Das, Monojit. (2017). Coding theory on generalized Fibonacci n-step polynomials. *Journal of Information and Optimization Sciences*, Vol. 38, issue 1, 83–131. https://doi.org/10.1080/02522667.2016.1160618
8. Basu, Manjusri, & Prasad, Bandhu. (2009, November). Coding theory on the m-extension of the Fibonacci p-numbers. *Chaos, Solitons, & Fractals*, Vol. 42, issue 4, 30, 2522–2530. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.197
9. Basu, Manjusri, & Prasad, Bandhu. (2011). Coding theory on the (m,t)-extension of the Fibonacci p-numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 3, 259–267. https://doi.org/10.1142/S1793830911001097
10. Domada, Triveni, Sadasivuni, Ashok Kumar, Ashok, Gudela, & Kumari, Dushma. (2023, August). Super-Encryption with Pell-Lucas Matrices and Graphs via Laplace Transformations. *Journal of Harbin Engineering University*, 44(8), 975–980. URL: https://harbinengineeringjournal.com/index.php/journal/article/view/992
11. Esmaeili, M., & Esmaeili, M. (2009). Polynomial Fibonacci-Hessenberg matrices. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 41, issue 5, 2820–2827. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.10.012

12. Esmaeili, M., Esmaeili, M., & Gulliver, T. A. (2011). High-rate Fibonacci polynomial codes. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings, St. Petersburg, Russia*, pp. 1921–1924. https://doi.org/10.1109/ISIT.2011.6033886
13. Esmaili, M., Moosavi, M., & Gulliver, T. A. (2017, January). A new class of Fibonacci sequence based error correcting codes. *Cryptography and Communications*, Vol. 9, 379–396. https://doi.org/10.1007/s12095-015-0178-x
14. Esmaili, Mostafa, & Esmaeili, Morteza. (2010). A Fibonacci-polynomial based coding method with error detection and correction. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 60, issue 10, 2738–2752. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.091
15. Falcon, S., & Plaza, A. (2009, February). On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, issue 3, 1005–1019. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.03.007
16. Fox, William P., & West, Richard D. (2024, September). Numerical Methods and Analysis with Mathematical Modelling (Textbooks in Mathematics). Chapman and Hall/CRC, 424 p. URL: https://www.amazon.com/Numerical-Mathematical-Modelling-Textbooks-Mathematics/dp/1032697237
17. Goy, Taras, & Shattuck, Mark. (2019, December). Fibonacci and Lucas Identities from Toeplitz–Hessenberg Matrices. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 14(2), 699–715. URL: https://www.researchgate.net/publication/337906242_Fibonacci_and_Lucas_Identities_from_Toeplitz-Hessenberg_Matrices
18. Gryciuk, Yurij, & Grytsyuk, Pavlo. (2015). Perfecting of the matrix Affine cryptosystem information security. Computer Science and Information Technologies: Proceedings of Xth International Scientific and Technical Conference (CSIT2015), 14–17 September, 2015, (pp. 67–69). https://doi.org/10.1109/stc-csit.2015.7325433
19. Grytsiuk, P. Y., & Hrytsiuk, Y. I. (2024). Methods for generating Lucas polynomials and features of their use for data encryption. *Scientific Bulletin of UNFU*, 34(8), 160–176. https://doi.org/10.36930/40340818
20. Grytsiuk, P. Y., & Hrytsiuk, Y. I. (2025). Method for generating a sequence of Fibonacci polynomial matrices and their features for use in block data encryption. *Scientific Bulletin of UNFU*, 35(1), 173–191. https://doi.org/10.36930/40350121
21. Grytsiuk, P. Yu., & Hrytsiuk, Yu. I. (2024). Methods for generating Fibonacci polynomials and features of their use for data encryption. *Scientific Bulletin of UNFU*, 34(7), 161–173. https://doi.org/10.36930/40340720
22. Hoggat, V. E., Bicknell, Marjorie. (1973). Roots of fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 11, issue 3, 271–274. https://doi.org/10.1080/00150517.1973.12430825
23. Hrytsiuk, Yu. I., & Grytsiuk, P. Yu. (2016). Features of generating Fibonacci Q_p-matrices – keys for implementing cryptographic transformations. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Series: Computer Science and Information Technology*, Vol. 843, 251–263. URL: https://vlp.com.ua/node/16094
24. Lee, G. Y., & Asci, M. (2012). Some Properties of the (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas Polynomials. *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2012, article ID 264842, 18 p. https://doi.org/10.1155/2012/264842
25. Nalli, A Ayse, & Haukkanen, Pentti. (2009, December). On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 42, issue 5, 3179–3186. https://doi.org/10.1016/J.CHAOS.2009.04.048
26. Nihal Tas, Sumeyra Ucar, Nihal Yilmaz Ozgur, & Oztunc Kaymak. (2018). A new coding/decoding algorithm using Fibonacci numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 10, No. 02, article ID 1850028. https://doi.org/10.1142/S1793830918500283
27. Özkan, Engin, Taştan, Merve & Aydoğdu, Ali. (2019). Fibonacci Sayılarının Ailesinde 3-Fibonacci Polinomları. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. Cilt: 12 Sayı: 2, 926–933. [In Turkish] https://doi.org/10.18185/erzifbed.512100
28. Prasad, Bandhu. (2014). Coding theory on $(h(x), g(y))$-extension of Fibonacci p-numbers polynomials. *Universal Journal of Computational Mathematics*, Vol. 2(1), 6–10. https://doi.org/10.13189/ujcmj.2014.020102
29. Prasad, Bandhu. (2014). High rates of Fibonacci polynomials coding theory. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 06, No. 04, article ID 1450053. https://doi.org/10.1142/S1793830914500530
30. Prasad, Bandhu. (2019). The generalized relations among the code elements for a new complex Fibonacci matrix. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 11, No. 02, article ID 1950026. https://doi.org/10.1142/S1793830919500265
31. Prasad, K., & Mahato, H. (2021). Cryptography using generalized Fibonacci matrices with Affine-Hill cipher. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(8), 2341–2352. Corpus ID: 14098285. https://doi.org/10.1080/09720529.2020.1838744
32. Ramirez, J. L. (2013). On convolved generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 229, 208–213. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.049
33. Robbins, N. (1991). Vieta's triangular array and a related family of polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol. 14, no. 2, 239–244. https://doi.org/10.1155/S0161171291000261
34. Sikhwal, Omprakash, & Vyas, Yashwant. (2016, October). Generalized Fibonacci Polynomials and Some Fundamental Properties. *SCIREA Journal of Mathematics*, Vol, 1, issue 1, 16–23. URL: https://article.scirea.org/pdf/11002.pdf
35. Sikhwal1, Omprakash, & Vyas, Yashwant. (2014). Fibonacci Polynomials and Determinant Identities. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(5), 189–192. https://doi.org/10.12691/tjant-2-5-6
36. Stakhov, A. P. (2006, October). Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. *Chaos, Solitons, & Fractals*, Vol. 30, issue 1, 56–66. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.12.054
37. Taştan, M., & Özkan, E. (2021). Catalan transform of the *k*-Pell, *k*-Pell–Lucas and modified *k*-Pell sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1), 198–207. https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.1.198-207
38. Uçar, S. (2017). On some properties of generalized Fibonacci and Lucas Polynomials. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications* (IJOCTA), 7(2), 216–224. https://doi.org/10.11121/IJOCTA.01.2017.00398
39. Vajda, S. (2007, December). Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section. *Theory and Applications* (Dover Books on Mathematics). Dover Publications, 192 p. URL: https://www.amazon.com/Fibonacci-Lucas-Numbers-Golden-Section/dp/0486462765
40. Wang, Weiping, & Wang, Hui. (2017, August). Generalized Humbert polynomials via generalized Fibonacci polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 307, 204–216. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.02.050
41. Yakymenko, I., Karpinski, M., Shevchuk, R., & Kasianchuk, M. (2024, May). Symmetric Encryption Algorithms in a Polynomial Residue Number System. *Journal of Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1155/2024/4894415
42. Yang, Jizhen, & Zhang, Zhizheng. (2018, December). Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 339, 451–458. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.054