

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2023-74-17>

УДК 512.2

ПАСІЧНИК Роман

Західноукраїнський національний університет

<https://orcid.org/0000-0003-3820-8854>

e-mail: [r.pasichnyk@wunu.edu.ua](mailto:r.pasichnyk@wunu.edu.ua)

ОТОО Франк

Західноукраїнський національний університет

e-mail: [f.otoo@wunu.edu.ua](mailto:f.otoo@wunu.edu.ua)

## МЕТОД ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ У ФОРМІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НА ПІДСТАВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

*Математичні моделі складних об'єктів у формі диференціальних рівнянь є широко розповсюдженими. Однак сама їх побудова, визначення їх параметрів та оцінка адекватності становлять неабиякі труднощі. Натомість розроблені підходи побудови різницевої схем на основі інтервальних методів. Такий підхід дозволяє будувати адекватні параметрично ідентифіковані моделі, похибка яких узгоджується із похибкою інтервальних даних. Однак така модель тісно прив'язана до експериментальних даних, що породжують проблеми її узагальнення на нові процеси інші типи даних. Для їх усунення запропоновано підхід апроксимації різницевої схем за допомогою відповідних диференціальних рівнянь. Продемонстровано способи такої апроксимації, адекватність яких досліджено експериментально.*

*Ключові слова: interval differential equations, structural identification, interval model, ряд Тейлора*

PASICHNYK Roman, OTOO Frank

West Ukrainian National University

## THE METHOD OF BUILDING A MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS IN THE FORM OF A DIFFERENTIAL EQUATION BASED ON INTERVAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Mathematical models of complex objects in the form of differential equations are widespread. However, their very construction, determination of their parameters and assessment of adequacy are quite difficult. Instead, approaches for constructing difference schemes based on interval methods have been developed. This approach allows building adequate parametrically identified models, the error of which is consistent with the error of interval data. However, such a model is closely tied to experimental data, which creates problems in its generalization to new processes and other types of data. To eliminate them, the approach of approximation of difference schemes using the corresponding differential equations is proposed. Methods of such approximation have been demonstrated, the adequacy of which has been investigated experimentally.*

*Keywords: interval differential equations, structural identification, interval model, Taylor series*

### Постановка проблеми у загальному вигляді

#### та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Останнім часом для прийняття рішень в екології набули широкого застосування математичні моделі складних об'єктів у формі диференціальних рівнянь [4, 18]. Такі рівняння будуються на основі отриманих експериментальних даних у межах індуктивного підходу [3]. Водночас зазначені математичні моделі часто є проблемними для застосування, оскільки вони повинні відображати важливі фізичні властивості об'єкта чи процесу забруднення атмосфери, що виходять із основних завдань моделювання [1]. При дедуктивному підході аналізуються властивості об'єкта, явища чи процесу, а потім вибирається відповідне математичне рівняння, яке розв'язується та його розв'язки порівнюють з результатами експерименту [2,5-8]. Результатом застосування дедуктивного підходу до побудови математичних моделей забруднення атмосфери, наприклад відображення його динаміки, є диференціальне рівняння [9]. Одночасно, в такому випадку, коефіцієнти цих рівнянь відображають різні властивості об'єкта чи явища [10]. Також значна частина математичних моделей забруднення атмосфери, стосується застосування диференціальних рівнянь в частинних похідних [12]. У таких рівняннях коефіцієнти мають також фізичний зміст [11]. Наприклад, у рівняннях масопереносу частинок речовини в повітрі ці коефіцієнти є коефіцієнтами дифузії [9-11]. Разом з тим, якщо математичні моделі побудовані у вигляді диференціальних рівнянь на основі експериментальних даних з використанням індуктивного підходу, ці коефіцієнти не мають фізичної інтерпретації, оскільки отримуються внаслідок обчислювальних процедур узгодження результатів експерименту із результатами обчислень на основі різницевої схеми [13]. Таким чином, достатньо складним є застосування такого типу математичних моделей для дослідження властивостей процесу забруднення атмосфери, зокрема для інших умов, які не повністю співпадають з умовами отримання експериментальних даних [14]. Також складно встановити адекватність

моделі досліджуваного об'єкта [15, 16-22]. Таким чином, виникає таке протиріччя, що, з одного боку, математична модель об'єкта у вигляді різницевого рівняння, яка побудована на основі інтервальних даних, узгоджується з експериментальними даними, а з іншого – складно оцінити повноту такої моделі. Водночас переваги отримання математичної моделі на основі її ідентифікації за інтервальними даними очевидні, оскільки сам процес ідентифікації моделі є вирішенням оптимізаційної задачі за допомогою універсальних, добре розроблених методів [23-32]. Ще однією перевагою такого підходу є те, що побудовані математичні моделі враховують похибки в даних на основі застосування інтервального аналізу даних. У цьому випадку математична модель будується у вигляді різницевого рівняння, що забезпечує розрахунок оцінок процесу забруднення атмосфери у вигляді числових інтервалів [23,33-36].

Також варто відзначити, що оптимізаційна задача ідентифікації такої моделі є достатньо складною з математичної точки зору. Проте, для її розв'язування розроблено достатньо методів на основі ройового інтелекту бджолиної сім'ї [23-32].

Таким чином, спираючись на відомі обчислювальні схеми ідентифікації математичних моделей у вигляді інтервальних диференціальних рівнянь на основі експериментальних даних, доцільною є розробка методу переходу від математичної моделі у вигляді інтервальних диференціальних рівнянь до математичної моделі у вигляді диференціального рівня. Такий підхід дозволить поєднати позитивні сторони дедуктивного та індуктивного підходів до побудови математичних моделей та до їх інтерпретації.

### Постановка задачі

Як було вказано у попередньому розділі моделювання процесів забруднення атмосфери таким розподіленим об'єктом, яким є автотранспорт, доцільно проводити на основі застосування різницевого рівнянь, отриманих із застосуванням індуктивного підходу. Таким чином модель розподілу концентрацій шкідливих викидів автотранспорту подаємо у вигляді такого різницевого рівняння в загальному вигляді:

$$v_{i,j,h,k} = \vec{f}^T(v_{i-d,j-d,k-d}, v_{i-d+1,j-d,k-d}, \dots, v_{j-d+1,d,d}, \dots, v_{i-1,j-1,k-1}, \dots, v_{i,j,k}) \cdot \vec{g}, \quad i = d, \dots, I, \quad j = d, \dots, J, \quad k = d, \dots, K \quad (1)$$

де  $v_{i,j,h,k}$  – означає обчислене значення концентрації шкідливої речовини у газоподібному вигляді у приземистому шарі атмосферного повітря прогнозоване чи модельоване значення вимірної характеристики об'єкта в точці з дискретними координатами  $i = d, \dots, I, j = d, \dots, J$  та у дискретні моменти часу  $k = d, \dots, K$ ;

$d$  – порядок різницевої схеми(1);

$\vec{g}$  – вектор невідомих значень параметрів моделі;

$\vec{f}^T$  – не відомий вектор базисних функцій, які перетворюють значення обчисленої концентрації шкідливої газоподібної речовини для попередніх точок та дискретних моментів часу.

Позначимо:

$$\vec{V} = (v_{i-d,j-d,k-d}, v_{i-d+1,j-d,k-d}, \dots, v_{j-d+1,d,d}, K, v_{i-1,j-1,k-1}, \dots, v_{i,j,k})^T \quad (2)$$

Для ідентифікації цього різницевого рівняння (2.1) необхідно отримати дані спостережень, тобто вимірювань концентрацій шкідливої речовини у приземистому шарі атмосферного повітря. Ці вимірювання подаємо в інтервальному вигляді, оскільки вони містять інтервальні похибки

$$[z_{i,j,k}^-, z_{i,j,k}^+], i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J, k = 0, \dots, K, \quad (3)$$

де  $[z_{i,j,k}^-, z_{i,j,k}^+]$  – нижня та верхня межі вимірної концентрації шкідливої речовини в точці з дискретними координатами  $i = 0, \dots, I, j = 0, \dots, J$  та у дискретні моменти часу  $k = 0, \dots, K$ .

Критерієм достатньої точності математичної моделі у вигляді різницевого рівняння (1) є:

$$[\hat{v}_{i,j,k}^-, \hat{v}_{i,j,k}^+] \subset [z_{i,j,k}^-, z_{i,j,k}^+] \forall i = 0, \dots, I, \forall j = 0, \dots, J, \forall k = 0, \dots, K \quad (4)$$

де  $[\hat{v}_{i,j,k}^-, \hat{v}_{i,j,k}^+]$  – є числовим інтервалом обчисленої на основі математичної моделі концентрації шкідливої речовини.

Варто зазначити, що структура моделі (1) є набір взаємопов'язаних компонент

$$\lambda_s = \{f_1^s(\vec{V}) \cdot g_1^s; f_2^s(\vec{V}) \cdot g_2^s; \dots; f_{m_s}^s(\vec{V}) \cdot g_{m_s}^s\} \quad (5)$$

де  $s$  – означає певний набір структурних елементів із деякої наперед відомої множини  $F$ .

Для обчислень за різницевою схемою (1) необхідно задати початкові умови:

$$[\hat{v}_{0,0,0}^-; \hat{v}_{0,0,0}^+] \subseteq [z_{0,0,0}^-; z_{0,0,0}^+], \dots, [\hat{v}_{1,d-1,0}^-; \hat{v}_{1,d-1,0}^+] \subseteq [z_{1,d-1,0}^-; z_{1,d-1,0}^+], \dots, [\hat{v}_{d-1,d-1,d-1}^-; \hat{v}_{d-1,d-1,d-1}^+] \subseteq [z_{d-1,d-1,d-1}^-; z_{d-1,d-1,d-1}^+], \quad (6)$$

які власне і налаштовують різницеву схему під конкретні умови щодо інтенсивності викидів шкідливої речовини та її розподілу на поверхні землі.

Будемо вважати, що лінійної за параметрами різницевої схеми достатньо для опису вищезазначених процесів. Тоді усі моделі- претенденти матимуть такий вигляд різницевого інтервального рівняння:

$$[v_{i,j,h,k}(\lambda_s, [\hat{V}])] = [f_1^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_1^S + [f_2^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_2^S + \dots + [f_{m_s}^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_{m_s}^S, \quad (7)$$

а для їх ідентифікації отримуємо таку ІСНАР:

$$[\hat{v}_{0,0,0}^-; \hat{v}_{0,0,0}^+] \subseteq [z_{0,0,0}^-; z_{0,0,0}^+], \dots, [\hat{v}_{d-1,d-1,d-1}^-; \hat{v}_{d-1,d-1,d-1}^+] \subseteq [z_{d-1,d-1,d-1}^-; z_{d-1,d-1,d-1}^+] \quad (8)$$

$$z_{i,j,k}^- \leq [f_1^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_1^S + [f_2^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_2^S + K + [f_{m_s}^S([\hat{V}])] \cdot \hat{g}_{m_s}^S \leq z_{i,j,k}^+,$$

$$i = d, \dots, I, j = d, \dots, J, k = d, \dots, K.$$

У виразі  $f_i^S([\hat{V}]) = f_i^S([\hat{v}_{i-d,j-d,k-d}, \dots, \hat{v}_{i,j-d,k}, \dots, \hat{v}_{i,j,k}])$ , а  $[\bar{V}] = [\hat{v}_{i-d,j-d,k-d}, \dots, \hat{v}_{i,j-d,k}, \dots, \hat{v}_{i,j,k}]$  інтервальний вектор з компонентами, які означають інтервальні оцінки обчисленої концентрації. При чому, на початкових дискретах ці інтервали є вимірними, а в подальшому їх обчислюємо на основі інтервальної різницевої схеми у вигляді (7).

Математичний вираз у вигляді (8) називаємо інтервальною дискретною моделлю процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі, яку налаштовуємо на основі спостережень за цим явищем.

Якщо у ІСНАР (8) зафіксувати структуру моделі, тобто поточний вектор базисних функцій, то з її розв'язку можемо отримати невідомі оцінки  $g^S$  параметрів моделі.

Враховуючи високу обчислювальну складність розв'язування цієї системи (комбінаторну), на практиці, обчислюють тільки точкові оцінки параметрів  $g^S$ , попередньо замінивши умови належності прогнозованих значень до експериментальних в такому вигляді:  $\hat{v}_{0,0,0} \in [z_{0,0,0}^-; z_{0,0,0}^+], \dots, \hat{v}_{1,d-1,0} \in [z_{1,d-1,0}^-; z_{1,d-1,0}^+], \dots, \hat{v}_{d-1,d-1,d-1} \in [z_{d-1,d-1,d-1}^-; z_{d-1,d-1,d-1}^+]$ .

При цьому процес ідентифікації як параметрів так і невідомих структурних елементів трансформують до розв'язування такої оптимізаційної задачі:

$$\delta(\lambda_s, \hat{g}_i^S) \xrightarrow{\lambda_s = \{f_1^S(\bar{V}) \cdot \hat{g}_{i1}^S, f_2^S(\bar{V}) \cdot \hat{g}_{i2}^S, \dots, f_{m_s}^S(\bar{V}) \cdot \hat{g}_{i m_s}^S\}} \min \quad (9)$$

$$m_s \in [I_{min}; I_{max}], f_1^S(\bar{V}), f_2^S(\bar{V}), \dots, f_{m_s}^S(\bar{V}) \in F, \\ g_{jl}^S \in [g_{jl}^{low}; g_{jl}^{up}], j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, S \quad (10)$$

де  $m_s \in [I_{min}; I_{max}]$  – величина, яка характеризує елементів  $s$ -ї структури моделі;  $F = \{f_1^S(\bar{V}), f_2^S(\bar{V}), \dots, f_m^S(\bar{V})\}$  – множина усіх можливих елементів структури інтервальної моделі;  $g_{jl}^{low}; g_{jl}^{up}$  – нижнє та верхнє можливе значення кожного параметра моделі.

У виразі (9), показник якості  $\delta(\lambda_s, \hat{g}_i^S)$  – критеріальна функція, формується із ІСНАР (8) у спосіб, описаний у першому розділі і має такий вигляд:

$$\delta(\lambda_s, \hat{g}_i^S) = \sum_{i=d}^I \sum_{j=d}^J \sum_{k=d}^K (f_1^S(\bar{V}) \cdot \hat{g}_{i1}^S + \dots + f_m^S(\bar{V}) \cdot \hat{g}_{im}^S) - (a_{i,j,k} \cdot z_{i,j,k}^- + (1 - a_{i,j,k}) \cdot z_{i,j,k}^+)^2 \quad (11)$$

де

$$a_{i,j,k} \in [0,1], i = d, \dots, I, j = d, \dots, J, k = d, \dots, K \quad (12)$$

В цьому випадку математична модель-претендент набуває такого вигляду:

$$v_{i,j,k}(\lambda_s, \vec{V}) = f_1^S(\vec{V}) \cdot \hat{g}_1^S + f_2^S(\vec{V}) \cdot \hat{g}_2^S, \dots, f_{m_s}^S(\vec{V}) \cdot \hat{g}_{m_s}^S \quad (13)$$

Також кількість обчислень значень цієї функції в оптимізаційній процедурі (10), (11) визначає її часову складність обчислень.

Зважаючи на ці факти, у багаточисленних працях запропоновано використати методи випадкового пошуку розв'язку цієї оптимізаційної задачі на основі поведінкових моделей бджолоїної колонії (ПМБК) [28-30].

Не вдаючись в подробиці реалізації цього методу, описаного в багаточисленних працях [23-27] відзначимо тільки його особливості.

Основна ідея ПМБК полягає в організації обчислювальної схеми на основі моделювання поведінки колонії медоносних бджіл у процесі пошуку їжі (нектару).

Розглядаючи контекст діяльності бджолоїної колонії, у природі бджоли-розвідниці спочатку вилітають із вулика, шукаючи нектар у випадковому напрямку. Якість джерела нектару визначається кількістю нектару, а також відстанню від вулика до джерела. Тобто в бджолоїній колонії є кілька категорій бджіл, із якими є бджоли-розвідниці. Коли бджоли-розвідники повертаються у вулик, вони повідомляють про знайдені джерела їжі іншим особинам колонії. На основі отриманої інформації про якість знайденого нектару робочі бджоли з вулика вибирають джерело нектару, до якого вони полетять. Також на вулиці є ще одна категорія бджіл, які називаються бджоли дослідники, завданням яких є дослідження околиць джерел нектару. Основний принцип: чим краще джерело їжі, то більше бджіл буде летіти до нього. Потім процес повторюється [27].

Варто зазначити, що в контексті розв'язування оптимізаційної задачі (9, 10, 12) розглянуті принципи ройового інтелекту можна сформулювати наступним чином

1. Ініціалізація популяції агентів алгоритму (у просторі пошуку розв'язків задачі випадковим чином формують певну кількість стартових точок (потенційних розв'язків оптимізаційної задачі (9, 10, 12)).

2. Переміщення агентів алгоритму (на основі набору правил руху, характерних для кожного ройового алгоритму, агенти переміщуються в просторі розв'язків оптимізаційної задачі (9, 10, 12) таким чином, щоб наблизитися до екстремуму функції призначення.

3. Завершення процедури (при виконанні умови зупинки, інакше перехід до другого кроку). Варто зазначити, що на сьогоднішній день існує багато модифікацій цього алгоритму, зокрема і реалізованих на паралельних обчисленнях, що робить цей метод одним із найбільш ефективним для розв'язування вище зазначеної задачі серед усіх ройових алгоритмів.

Тобто, можемо констатувати, що індуктивний підхід для побудови математичних моделей процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі у вигляді інтервальних різницевого рівнянь є достатньо ефективним і достатньо розробленим. Але, як вже зазначалося вище, побудовані у вигляді таких рівнянь математичні моделі складні для інтерпретації фізичних властивостей процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі, оскільки коефіцієнти цих рівнянь не мають фізичної інтерпретації.

Тому задачею є розробка методу, який дає можливість перетворення цього інтервального різницевого рівняння в диференціальне рівняння з метою інтерпретації властивостей процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі, а також розширення умов застосування моделі.

### Метод перетворення інтервального різницевого рівняння до диференціального рівняння

Як відомо, будь-який диференціальний оператор можна представити різницевою співвідношенням із задовільною точністю. У задачі побудови прозорої інтерпретації ідентифікованої різницевої схеми на основі експериментальних даних актуальним стає зворотнє завдання із задовільною точністю наблизити різницеву схему деяким диференціальним рівнянням.

Для його розв'язання будемо використовувати формули розкладу значень шуканої функції у вузлах різницевої сітки в ряд Тейлора в околі базового вузла а також різницевого представлення похідних в цьому ж околі. Тобто той же апарат, який використовується для побудови різницевого схем для диференціального рівняння будемо використовувати для формування диференціального рівняння, що із певною точністю відповідає заданій різницевої схемі.

Сформулюємо алгоритм зведення різницевої схеми до диференціального рівняння із наступним його дослідженням таким чином:

1. Наближаємо значення невідомої функції у вузлі, що найбільше віддалений від базового і подаємо значення функції у такому вузлі за допомогою похідних, максимальний порядок яких визначається віддаленістю аналізованого вузла від базового.

Продовжуємо процес апроксимації для всіх вузлів, що не співпадають із базовим в порядку їх віддаленості від останнього.

2. У одновимірному випадку процес наближення продовжуємо для вузлів, що віддалені від базового більше як на два кроки. З метою мінімізації обчислень для наближення значення невідомої функції у ближніх вузлах використовуємо широко розповсюджені співвідношення різницевої апроксимації похідних першого та другого порядків, або вищого порядків у разі необхідності.

3. Підставляючи отримані співвідношення у різницеву схему отримуємо її наближення диференціальним рівнянням відповідного порядку.

4. Будуємо характеристичне рівняння для отриманого диференціального рівняння однієї змінної або послідовність характеристичних рівнянь при фіксованих значеннях всіх змінних крім однієї, згідно методу прямих.

5. Будуємо аналітичні представлення розв'язків для характеристичних рівнянь. Відбираємо ті із них, які відповідають природі задачі.

6. На основі крайових умов задачі будуємо загальне представлення розв'язку одновимірної задачі або послідовність профілів розв'язку задачі у випадку багатьох змінних.

Такі аналітичні розв'язки, як правило, мають прозору інтерпретацію в умовах поставленої задачі. Окрім цього, перехід до диференціального рівняння під'єднує до задачі ряд однотипних процесів різної природи, динаміка чи характер яких описується тими самими диференціальними рівняннями.

Пояснимо особливості описаного підходу на різницевої схемі для функції двох змінних у такому вигляді:

$$v_{i,j} = g_1 + g_2 v_{i,j-1} + g_3 v_{i-1,j} + g_4 v_{i-1,j-1} + g_5 v_{i,j-2} + g_6 v_{i,j-3} \quad (14)$$

Найвіддаленішим від базового вузла  $(i,j)$  в даній схемі є вузол  $(i,j-3)$ . Тому починаємо із апроксимації значень невідомої функції саме у цьому вузлі:

$$v_{i,j-3} = v(x_i, y_j - 3\Delta y) = v_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial y}(i,j) \cdot (3\Delta y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(i,j) \cdot \left(\frac{9}{2}\Delta y^2\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(i,j) \cdot \left(\frac{9}{2}\Delta y^3\right) + O(\varepsilon^4), \quad (15)$$

де  $\varepsilon = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Оскільки із цього співвідношення плануємо використати кубічну похідну, то розклад ведемо до компоненти на одиницю вищого порядку для забезпечення апроксимаційних властивостей.

Послідовно здійснюючи апроксимацію отримуємо:

$$v_{i,j-2} = v(x_i, y_j - 2\Delta y) = v_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial y}(i,j) \cdot (2\Delta y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(i,j) \cdot (2\Delta y^2) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(i,j) \cdot \left(\frac{4}{3}\Delta y^3\right) + O(\varepsilon^4), \quad (16)$$

$$v_{i-1,j-1} = v(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y) = v_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial x}(i,j) \cdot \Delta x - \frac{\partial v}{\partial y}(i,j) \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta x^2}{2}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(i,j) \cdot (\Delta x \Delta y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta y^2}{2}\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta x^3}{6}\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}(i,j) \cdot \left(\frac{1}{2}\Delta x^2 \Delta y\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(i,j) \cdot \left(\frac{1}{2}\Delta x \Delta y^2\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta y^3}{6}\right) + O(\varepsilon^4) \quad (17)$$

$$v_{i-1,j} = v(x_i - \Delta x, y_j) = v_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial x}(i,j) \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta x^2}{2}\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta x^3}{6}\right) + O(\varepsilon^4), \quad (18)$$

$$v_{i,j-1} = v(x_i, y_j - \Delta y) = v_{i,j} - \frac{\partial v}{\partial y}(i,j) \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta y^2}{2}\right) - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(i,j) \cdot \left(\frac{\Delta y^3}{6}\right) + O(\varepsilon^4) \quad (19)$$

Підставляючи співвідношення (15) – (19) в подання різницевої схеми (14) отримуємо:

$$v_{i,j} = g_1 + \alpha_2 v_{i,j} + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial x}(i,j) \cdot \Delta x + \alpha_4 \frac{\partial v}{\partial y}(i,j) \cdot \Delta y + \alpha_5 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(i,j) \Delta x^2 + \alpha_6 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(i,j) \cdot \Delta x \Delta y + \alpha_7 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(i,j) \Delta y^2 + \alpha_8 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(i,j) \Delta x^3 + \alpha_9 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}(i,j) \cdot \Delta x^2 \Delta y + \alpha_{10} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}(i,j) \cdot \Delta x \Delta y^2 + \alpha_{11} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(i,j) \Delta y^3 + O(\varepsilon^4) \quad (20)$$

де

$$\alpha_2 = g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6, \quad (21)$$

$$\alpha_3 = -g_3 - g_4, \quad (22)$$

$$\alpha_4 = -g_2 - g_4 - 2g_5 - 3g_6, \quad (23)$$



$$\alpha_5 = \frac{g_2 + g_4}{2}, \quad (24)$$

$$\alpha_6 = g_4, \quad (25)$$

$$\alpha_7 = \frac{g_2 + g_4}{2} + 2g_5 + \frac{9}{2}g_6, \quad (26)$$

$$\alpha_8 = -\frac{g_2 + g_4}{6}, \quad (27)$$

$$\alpha_9 = -\frac{1}{2}g_4, \quad (28)$$

$$\alpha_{10} = -\frac{1}{2_2}g_4, \quad (29)$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{6}g_2 - \frac{1}{6}g_4 - \frac{4}{3}g_5 - \frac{9}{2}g_6. \quad (30)$$

Таким чином отримано кубічне диференціальне рівняння (20) в частинних похідних, що наближає різницеву схему (14).

Описаний підхід на різницевій схемі для функції двох змінних може бути узагальнений для різницевої схеми будь-якого виду. В цьому випадку, єдине необхідно записати інтервальну різницеву схему в тому ж самому вигляді, тільки без використання інтервальних коефіцієнтів, чи інтервальних початкових умов, тобто в традиційному вигляді різницевої схеми.

Як бачимо у випадку застосування таких перетворень, спираючись на відомі обчислювальні схеми ідентифікації математичних моделей у вигляді інтервальних різницевих рівнянь на основі експериментальних даних, можемо поєднати позитивні сторони дедуктивного та індуктивного підходів до побудови математичних моделей складних об'єктів, зокрема з метою інтерпретації властивостей процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі, а також розширення умов застосування цієї математичної моделі.

### Експериментальні дослідження

Розглянемо на прикладах реалізацію схеми методу.

*Приклад 1.* Спочатку розглянемо детально схему методу на прикладі різницевої схеми для невідомої функції однієї змінної із максимальною віддаллю від базового вузла на два кроки. Таке різницеве рівняння отримано у праці [18] і використовується для моделювання поширення окислу вуглецю в приземистому шарі перпендикулярно до руху автотранспорту.

У ході досліджень було отримано концентрації окису вуглецю з відносною похибкою 10% перпендикулярно до дороги.

Водночас задано початкові умови для побудови різницевого рівняння у вигляді вимірних значень концентрацій  $CO$  у початкових дискретах  $k=0, 1, 2$  з відносною похибкою  $\pm 5\%$ .

У ході досліджень було здійснено побудову різницевого рівняння для вищезазначеного прикладу із використанням процедури адаптивного налаштування вибору структурних елементів в процесі структурної ідентифікації [34].

Зазначимо, що цей приклад апробації методу наведено у праці [16]. Показано співпадання розв'язку різницевого рівняння (отриманого на основі методу ідентифікації з процедурами ПМБК) у вигляді

$$[\hat{v}_k] = g_1 + g_2 [\hat{v}_{k-1}] - g_3 [\hat{v}_{k-2}], \quad k = 2, \dots, 10 \quad (31)$$

Та із підстановкою в нього значень коефіцієнтів  $g_1 = 0,222781$ ,  $g_2 = 0,728592$ ,  $g_3 = 0,133172$ , і розв'язку, отриманого диференціальногорівняння із використанням запропонованого методу у вигляді

$$h^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - ha_1 \frac{dv}{dx} + a_2 v + a_3 + O(h^3) = 0 \quad (32)$$

де

$$a_1 = \frac{g_2 + 2g_3}{g_3}, a_2 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{g_3}, a_3 = \frac{g_0}{g_3} \quad (33)$$

Результати прогнозування на основі обох моделей наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

**Виміряні та прогнозовані на основі аналітичного розв'язку рівняння величини окислу вуглецю**

№	Відстань від дороги, м.	Прогнозована концентрація CO на основі різницевої схеми (2)	Прогнозована концентрація CO на основі розв'язку (2.38)	Абсолютна похибка прогнозу	Відносна похибка прогнозу
k	$x_k, m$	$v_k(x), \text{мг/м}^3$	$v(x), \text{мг/м}^3$	$\text{мг/м}^3$	%
0	0	55	55	0	0
1	10	47	48,1904	-1,190	-2,16%
2	20	43	42,2493	0,750	1,36%
3	30	37	37,0661	-0,066	-0,12%
4	40	32	32,5439	-0,543	-0,99%
5	50	30	28,5986	1,401	2,55%
6	60	26	25,1564	0,843	1,53%
7	70	23	22,1533	0,846	1,54%
8	80	20	19,5333	0,466	0,85%
9	90	18	17,2474	0,7525	1,37%
10	100	16	15,2531	0,7468	1,36%

Як бачимо, максимальна відносна похибка прогнозу для аналітичного розв'язку склала 2.55%, що співмірно із похибкою прогнозу, побудованого на основі інтервальної різницевої схеми.

*Приклад 2.* Розглянемо приклад моделювання процесів дифузії діоксиду азоту в ґрунти внаслідок забруднення атмосфери вихлопними газами автотранспорту. Як відомо [11], в результаті такої дифузії в ґрунті утворюються азотна кислота чи її солі. Для побудови цієї моделі використаємо результати представлення концентрацій діоксиду азоту, чи солей азотної кислоти, які наведено у праці [6]. В таблиці 2 наведено результати оцінювання цих забруднень на глибині до 14 сантиметрів з дискретною 2 см,  $k=0\dots 7$  в одній точці.

Таблиця 2

**Виміряні концентрації солей азотної кислоти у ґрунті**

Номер дискрети	Глибина, m	Концентрація солей азотної кислоти, $10^{-6} \text{г/м}^3$	Інтервал концентрації солей азотної кислоти, $10^{-6} \text{г/м}^3$
k	h	$v_k$	$[z_k^-; z_k^+]$
0	0	14	[12,6;15,4]
1	0,02	13,8	[12,4;14,2]
2	0,04	10	[9;11]
3	0,06	5	[4,5;5,5]
4	0,08	1	[0,9;1,1]
5	0,1	0	0
6	0,12	0	0
7	0,14	0	0

Для побудови моделі було задано початкові умови у таких дискретах:  $k=0, 1$  та з інтервальним розширенням  $\pm 0,5\%$ . Водночас, під час моделювання експериментальні дані було задано з інтервальним розширенням  $\pm 10\%$ .

У ході застосування методу структурної ідентифікації інтервального різницевого ператора було отримано модель у такому вигляді:

$$[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = -0.01675 \cdot [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] + 0.05269 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \quad (34)$$

Результати прогнозування концентрацій солей азотної кислоти азоту із використанням моделі (34) наведено на рисунку 1. Зазначимо, що на рисунку 1 суцільною лінією позначено виміряні концентрації діоксиду азоту, а штрих-пунктирною – прогнозовані значення, відповідно.

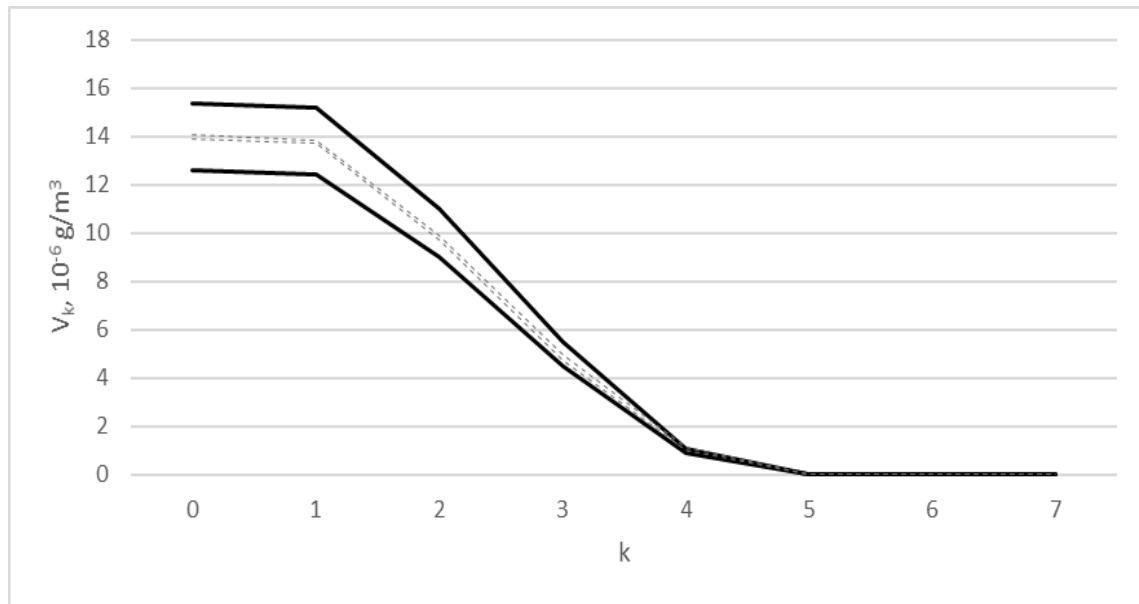


Рис. 2. Прогнозовані значення концентрацій солей азотної кислоти на основі отриманої математичної моделі (34) (пунктирна лінія)

Як видно із рисунка 2, результати верифікації математичної моделі (34) підтвердили її адекватність та гарантовані прогностичні властивості.

Розглянемо описаний підхід переходу від різницевого співвідношення  $[\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+] = -0.01675 \cdot [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] + 0.05269 \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+]$  до диференціального рівняння.

Варто зазначити, що в наведеному *прикладі 1* різницеве рівняння є лінійним і тому запропонований метод дає високу точність співпадання результатів за різницевою схемою і розв'язку отриманого диференціального рівняння. Отже, запропоноване перетворення у випадку лінійних різницевих схем із використанням наближення значень невідомої функції відрізками ряду Тейлора не викликає особливих труднощів. Однак, поява нелінійних компонентів у різницевих схемах, а саме такий випадок стосується *прикладу 2*, створює додаткові складнощі застосування запропонованого методу, оскільки не призводить до задовільної точності наближення розв'язками диференціального рівняння, розв'язків, отриманих із різницевих співвідношень. Саме нелінійні елементи різницевих схем є основою формування їх надійних апроксимацій за допомогою диференціальних рівнянь. Тому вузол нелінійного елемента покладаємо базовим, що забезпечить входження нелінійної структури у диференціальне рівняння без трансформацій.

В подальшому всі вузли різницевої схеми зводимо до базового, отримуючи відповідне диференціальне рівняння. Параметри крайових умов до диференціального рівняння також будуємо на основі значень, запозичених із різницевої схеми.

Інтерпретуємо інтервальну різницеву схему (34) як точкову схему в узагальненому вигляді

$$v_k = g_1 v_{k-2} + g_2 v_{k-1}^2 \quad (35)$$

За базовий вибираємо вузол нелінійності схеми ( $k-1$ ). Виводячи на основі (35) апроксимацію першої похідної у базовому вузлі та апроксимуючи значення  $v$  у вузлі ( $k-2$ ) за допомогою відрізка ряду Тейлора отримуємо

$$\frac{v_k - v_{k-1}}{h} = \frac{g_1 v_{k-2} + g_2 v_{k-1}^2 - v_{k-1}}{h} = \frac{g_1 v_{k-1} - h g_1 v'_{k-1} + g_2 v_{k-1}^2 - v_{k-1}}{h} \quad (36)$$

Звівши подібні отримуємо

$$(1 + g_1) v'_{k-1} = \frac{(g_1 - 1) v_{k-1} + g_2 v_{k-1}^2}{h}, \quad (37)$$

тобто

$$v'_{k-1} = \frac{(g_1 - 1) v_{k-1} + g_2 v_{k-1}^2}{h(1 + g_1)} \quad (38)$$

Подамо попередній вираз у зручній для чисельного диференціювання формі:

$$\frac{dv}{dh} = \alpha_1 v^2 - \alpha_2 v \quad (39)$$



де

$$\alpha_1 = \frac{g_2}{h(1+g_1)} \quad (40)$$

$$\alpha_1 = \frac{g_2}{h(1+g_1)} \quad (41)$$

Таким чином, отримано диференціальне рівняння:

$$\frac{dv}{dh} = -\alpha_2 v \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} v\right) \quad (42)$$

Розв'язок диференціального рівняння (42) – аналога різницевої схеми (34), наведено на рис. 3. Результати зіставлення отриманого розв'язку із розв'язком на основі різницевої схеми наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати зіставлення інтервальних прогнозованих та значень концентрації солей азотної кислоти на основі розв'язків рівнянь (35) та (39)

Номер дискрети	Глибина, m	Прогнозовані значення середини інтервалів концентрації солей азотної кислоти на основі різницевої схеми (35)	Прогнозовані значення концентрації солей азотної кислоти на основі розв'язку диференціального рівняння (39)	Відносна похибка прогнозу
k	h	$mid([\hat{v}_k^-; \hat{v}_k^+]), 10^{-6} \text{g/m}^3$	$\hat{v}_k, 10^{-6} \text{g/m}^3$	%
0	0	14	14	0,00%
1	0,02	13,8	13,8	0,00%
2	0,04	9,7997836	9,1	5,00%
3	0,06	4,828974121	4,65	1,28%
4	0,08	1,064531264	1,95	6,32%
5	0,1	0	0,74	5,29%
6	0,12	0	0,27	1,93%
7	0,14	0	0,1	0,71%

Результати зіставлення також наведено на рис. 3.

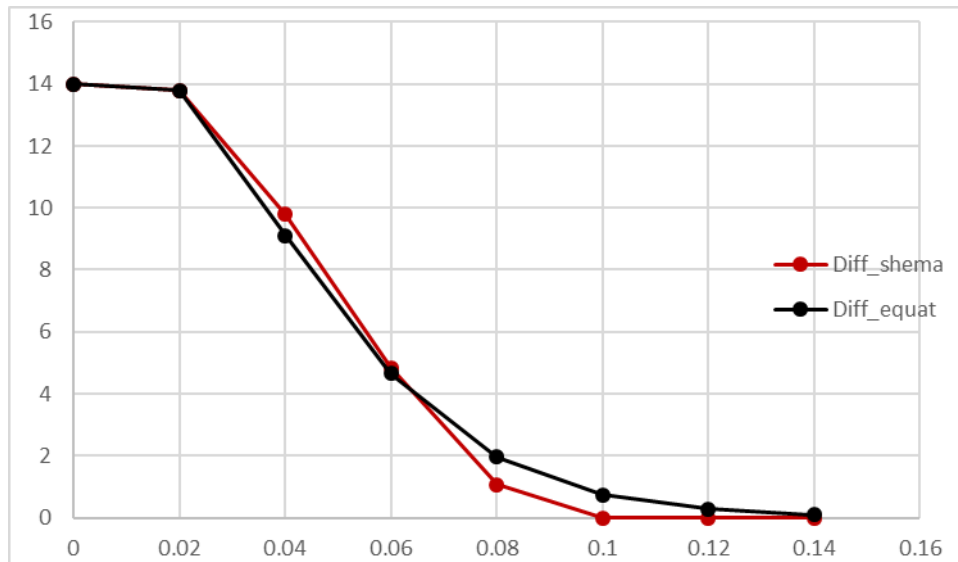


Рис.3. Результати зіставлення прогнозованих та значень концентрації солей азотної кислоти на основі розв'язків рівнянь (35) та (39)

Як бачимо, максимальна відносна похибка прогнозу для аналітичного розв'язку склала 6,32%, що співмірно із похибкою прогнозу, побудованого на основі інтервальної різницевої схеми.

#### Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

Результати досліджень на цьому прикладі показали, що навіть у випадку нелінійної різницевої схеми розв'язки обох рівнянь (диференціального та різницевого) практично мало відрізняються.

Таким чином, запропонований метод дає можливість побудувати диференціальне рівняння на основі свого аналога інтервального різницевого рівняння. В інтервальному різницевому рівнянні, побудованому на основі експериментальних даних методами індуктивного підходу, коефіцієнти різницевої схеми не мають фізичного змісту, що ускладнює інтерпретацію фізичних властивостей об'єкта. Разом із тим індуктивний підхід до побудови математичних моделей у вигляді інтервального різницевого рівняння ґрунтується на алгоритмах бджолоїної колонії і має достатню кількість модифікацій, реалізованих програмно. Отже, запропонований метод дає можливість поєднати переваги індуктивного та дедуктивного підходів до побудови математичних моделей на основі аналізу даних та до їх застосування та інтерпретації.

На тестових прикладах, які стосуються процесу забруднення атмосферного повітря у приземистому шарі атмосфери та процесів дифузії цих шкідливих викидів у ґрунти підтверджено ефективність та практична значущість методу. Для прикладу моделювання поширення окислу вуглецю в приземистому шарі перпендикулярно до руху автотранспорту максимальна відносна похибка прогнозу для аналітичного (на основі отриманого диференціального рівняння) розв'язку склала 2.55%, що співмірно із похибкою прогнозу, побудованого на підставі різницевої схеми. Для прикладу моделювання процесів дифузії діоксиду азоту в ґрунти внаслідок забруднення атмосфери вихлопними газами автотранспорту максимальна відносна похибка прогнозу для аналітичного (на основі отриманого диференціального рівняння) розв'язку склала 6.32%, що співмірно із похибкою прогнозу, побудованого на підставі різницевої схеми. При цьому слід зауважити, що у другому прикладі різницеве рівняння було нелінійним, що дещо ускладнює реалізацію запропонованого методу.

### Література

1. Goddard, W. & Melville, S. (2004) "Research Methodology: An Introduction" 2nd edition, Blackwell Publishing
2. Bernard, H.R. (2011) "Research Methods in Anthropology" 5th edition, AltaMira Press, p.7
3. Ivakhnenko, A. G. (1966). Group Method of Data Handling - A Rival of the Method of Stochastic Approximation. Soviet Automatic Control, 13, 43-71.
4. Saunders, M., Lewis, P. & Thornhill, A. (2012) "Research Methods for Business Students" 6th edition, Pearson Education Limited
5. Neuman, W.L. (2003) "Social Research Methods: Qualitative and Quantitative Approaches" Allyn and Bacon
6. Lodico, M.G., Spaulding, D.T & Voegtler, K.H. (2010) "Methods in Educational Research: From Theory to Practice" John Wiley & Sons, p.10
7. Dag, O., Yozgatligil, C. (2016). GMDH: An R Package for Short Term Forecasting via GMDH Type Neural Network Algorithms. The R Journal, 8:1, 379-386.
8. Kondo, T., Ueno, J. (2006). Revised GMDH-Type Neural Network Algorithm With A Feedback Loop Identifying Sigmoid Function Neural Network. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2:5, 985-996.
9. Sun W.-Y. and C.-Z. Chang. Diffusion model for a convective layer. Part 2: Plume released from a continuous point source. J. Climate Appl. Meteorol. 1986, vol. 25, No 10, pp. 1454-1463
10. Pasquill F. Atmospheric dispersion parameters in gaussian plume modeling: [part II. Possible Requirements for Change in the Turner Workbook Values]. / F. Pasquill // EPA-600/4-76-030b, U.S. Environmental Protection Agency, Research Triangle Park, North Carolina 27711. - 1976.
11. П. Венгерський, О. Демкович. Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті. Львівський національний університет імені Івана Франка
12. I. Kopas. Differential equations. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018, 126 p.
13. O. Zybanov. Differential equations. Vasyl' Stus Donetsk National University, 2018, 72 p.
14. Wang W.-S., "Discrete transform methods of solutions of the fractional difference equations", Proceedings-2018 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, ICISCE, 2019, pp.714-717
15. M. Dyvak, I. Voytyuk, N. Porplytsya and A. Pukas, "Modeling the process of air pollution by harmful emissions from vehicles," 2018 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Slavske, 2018, pp. 1272-1276, doi: 10.1109/TCSET.2018.8336426.
16. M. Dyvak, N. Porplytsya, "Formation and Identification of a Model for Recurrent Laryngeal Nerve Localization During the Surgery on Neck Organs", Advances in Intelligent Systems and Computing III. CSIT 2018, Cham: Springer, vol.871, pp. 391-404, 2019.
17. Dyvak, M., Papa, O., Melnyk, A., Pukas, A., Porplytsya, N., Rot, A. Interval model of the efficiency of the functioning of information web resources for services on ecological expertise (2020) Mathematics, 8 (12), art. no. 2116, pp. 1-12.

18. Ocheretnyuk, N.; Voytyuk, I.; Dyvak, M.; Martsenyuk, Ye. Features of structure identification the macromodels for nonstationary fields of air pollutions from vehicles. In Proceedings of the Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science—Proceedings of the 11th International Conference, Lviv, Ukraine, 17–19 May, 2012; p. 444.
19. Lee, Y.-H., & Haberman, S. J. (2021). Studying score stability with a harmonic regression family: A comparison of three approaches to adjustment of examinee-specific demographic data. *Journal of Educational Measurement*, 58(1), 54–82.
20. A. Agresti *Categorical Data Analysis* (second ed.), Wiley, New York (2002)
21. M. Analla. Model validation through the linear regression fit to actual versus predicted values *Agricultural Systems*, 57 (1998), pp. 115-119
22. J. Bibby, H. Toutenburg *Prediction and Improved Estimation in Linear Models*. Wiley, Berlin (1977)
23. Dyvak, Mykola. (2020). Parameters Identification Method of Interval Discrete Dynamic Models of Air Pollution Based on Artificial Bee Colony Algorithm. 130-135. 10.1109/ACIT49673.2020.9208972.
24. Sun, Chen, et al. Stochastic prediction of multi-agent interactions from partial observations. arXiv preprint arXiv:1902.09641, 2019.
25. J. C. Bansal, P. K. Singh, N. R. Pal. *Evolutionary and Swarm Intelligence Algorithms*, Springer Cham, 2019, 190 p.
26. J. Tang, G. Liu and Q. Pan. A Review on Representative Swarm Intelligence Algorithms for Solving Optimization Problems: Applications and Trends. In *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, vol. 8, no. 10, pp. 1627-1643.
27. A. Mortazavi, V. Toğan, M. Moloodpoor. Solution of structural and mathematical optimization problems using a new hybrid swarm intelligence optimization algorithm. *Advances in Engineering Software*, Volume 127, 2019, pp. 106-123.
28. Wang, H., Wang, W., Zhou, X. Artificial bee colony algorithm based on knowledge fusion. *Complex Intell. Syst.* 7, 1139–1152 (2021).
29. D. Bajer, B. Zorić. An effective refined artificial bee colony algorithm for numerical optimisation, *Information Sciences*, Volume 504, 2019, pp. 221-275.
30. K. Hussain, M. N. M. Salleh, Shi Cheng, Yu. Shi, R. Naseem. Artificial bee colony algorithm: A component-wise analysis using diversity measurement, *Computer and Information Sciences*, V. 32, Issue 7, 2020, pp. 794-808.
31. N. Ocheretnyuk, M. Dyvak, T. Dyvak, I. Voytyuk “Structure identification of interval difference operator for control the production process of drywall,” in *Proc. 12th Int. Conf. on Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, 2013, pp. 262-264.
32. M. Dyvak; N. Porplytsya; Y. Maslyiak and N. Kasatkina. Modified artificial bee colony algorithm for structure identification of models of objects with distributed parameters and control. 2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM), Lviv, 2017, pp. 50-54.
33. M. Dyvak, N. Kasatkina, A. Pukas, N. Padletska. “Spectral analysis the information signal in the task of identification the recurrent laryngeal nerve in thyroid surgery”. *Przegląd Elektrotechniczny*, vol. 89, no. 6, pp. 275- 277, 2013.
34. Porplytsya, N., Dyvak, M.: Interval difference operator for the task of identification recurrent laryngeal nerve. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE'2015)*, pp. 156-158 (2015).
35. Dyvak, M., Pukas, A., Oliynyk, I., Melnyk, A. Selection the 'Saturated' Block from Interval System of Linear Algebraic Equations for Recurrent Laryngeal Nerve Identification *Proceedings of the 2018 IEEE 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing, DSMP 2018*, 2018, pp. 444–448, 8478528
36. M. Dyvak, V. Manzhula, O. Kozak. New method tolerance estimation of the parameters set of interval model based on saturated block of ISLAE, *Proceeding of the IX–th International Conference CADSM'2007*, Lviv–Polyana, 2007, p. 376-379.

## References

1. Goddard, W. & Melville, S. (2004) “*Research Methodology: An Introduction*” 2nd edition, Blackwell Publishing
2. Bernard, H.R. (2011) “*Research Methods in Anthropology*” 5th edition, AltaMira Press, p.7
3. Ivakhnenko, A. G. (1966). *Group Method of Data Handling - A Rival of the Method of Stochastic Approximation*. *Soviet Automatic Control*, 13, 43-71.
4. Saunders, M., Lewis, P. & Thornhill, A. (2012) “*Research Methods for Business Students*” 6th edition, Pearson Education Limited
5. Neuman, W.L. (2003) “*Social Research Methods: Qualitative and Quantitative Approaches*” Allyn and Bacon
6. Lodico, M.G., Spaulding, D.T & Voegtler, K.H. (2010) “*Methods in Educational Research: From Theory to Practice*” John Wiley & Sons, p.10
7. Dag, O., Yozgatligil, C. (2016). GMDH: An R Package for Short Term Forecasting via GMDH Type Neural Network Algorithms. *The R Journal*, 8:1, 379-386.

8. Kondo, T., Ueno, J. (2006). Revised GMDH-Type Neural Network Algorithm With A Feedback Loop Identifying Sigmoid Function Neural Network. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2:5, 985-996.
9. Sun W.-Y. and C.-Z. Chang. Diffusion model for a convective layer. Part 2: Plume released from a continuous point source. *J. Climate Appl. Meteorol.* 1986, vol. 25, No 10, pp. 1454-1463
10. Pasquill F. Atmospheric dispersion parameters in gaussian plume modeling: [part II. Possible Requirements for Change in the Turner Workbook Values]. / F. Pasquill // EPA-600/4-76-030b, U.S. Environmental Protection Agency, Research Triangle Park, North Carolina 27711. - 1976.
11. P. Vengerskyi, O. Demkovich. Construction of a mathematical model of the process of liquid filtration in the soil. Lviv Ivan Franko National University
12. I. Kopas. Differential equations. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2018, 126 p.
13. O. Zyubanov. Differential equations. Vasyl' Stus Donetsk National University, 2018, 72 p.
14. Wang W.-S., "Discrete transform methods of solutions of the fractional difference equations", *Proceedings-2018 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, ICISCE*, 2019, pp.714-717
15. M. Dyvak, I. Voytyuk, N. Porplytsya and A. Pukas, "Modeling the process of air pollution by harmful emissions from vehicles," *2018 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Slavske*, 2018, pp. 1272-1276, doi: 10.1109/TCSET.2018.8336426.
16. M. Dyvak, N. Porplytsya, "Formation and Identification of a Model for Recurrent Laryngeal Nerve Localization During the Surgery on Neck Organs", *Advances in Intelligent Systems and Computing III. CSIT 2018*, Cham: Springer, vol.871, pp. 391-404, 2019.
17. Dyvak, M., Papa, O., Melnyk, A., Pukas, A., Porplytsya, N., Rot, A. Interval model of the efficiency of the functioning of information web resources for services on ecological expertise (2020) *Mathematics*, 8 (12), art. no. 2116, pp. 1-12.
18. Ocheretnyuk, N.; Voytyuk, I.; Dyvak, M.; Martsenyuk, Ye. Features of structure identification the macromodels for nonstationary fields of air pollutions from vehicles. In *Proceedings of the Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science—Proceedings of the 11th International Conference*, Lviv, Ukraine, 17–19 May, 2012; p. 444.
19. Lee, Y.-H., & Haberman, S. J. (2021). Studying score stability with a harmonic regression family: A comparison of three approaches to adjustment of examinee-specific demographic data. *Journal of Educational Measurement*, 58(1), 54–82.
20. A. Agresti *Categorical Data Analysis* (second ed.), Wiley, New York (2002)
21. M. Analla. Model validation through the linear regression fit to actual versus predicted values *Agricultural Systems*, 57 (1998), pp. 115-119
22. J. Bibby, H. Toutenburg *Prediction and Improved Estimation in Linear Models*. Wiley, Berlin (1977)
23. Dyvak, Mykola. (2020). Parameters Identification Method of Interval Discrete Dynamic Models of Air Pollution Based on Artificial Bee Colony Algorithm. 130-135. 10.1109/ACIT49673.2020.9208972.
24. Sun, Chen, et al. Stochastic prediction of multi-agent interactions from partial observations. *arXiv preprint arXiv:1902.09641*, 2019.
25. J. C. Bansal, P. K. Singh, N. R. Pal. *Evolutionary and Swarm Intelligence Algorithms*, Springer Cham, 2019, 190 p.
26. J. Tang, G. Liu and Q. Pan. A Review on Representative Swarm Intelligence Algorithms for Solving Optimization Problems: Applications and Trends. In *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, vol. 8, no. 10, pp. 1627-1643.
27. A. Mortazavi, V. Toğan, M. Moloodpoor. Solution of structural and mathematical optimization problems using a new hybrid swarm intelligence optimization algorithm. *Advances in Engineering Software*, Volume 127, 2019, pp. 106-123.
28. Wang, H., Wang, W., Zhou, X. Artificial bee colony algorithm based on knowledge fusion. *Complex Intell. Syst.* 7, 1139–1152 (2021).
29. D. Bajer, B. Zorić. An effective refined artificial bee colony algorithm for numerical optimisation, *Information Sciences*, Volume 504, 2019, pp. 221-275.
30. K. Hussain, M. N. M. Salleh, Shi Cheng, Yu. Shi, R. Naseem. Artificial bee colony algorithm: A component-wise analysis using diversity measurement, *Computer and Information Sciences*, V. 32, Issue 7, 2020, pp. 794-808.
31. N. Ocheretnyuk, M. Dyvak, T. Dyvak, I. Voytyuk "Structure identification of interval difference operator for control the production process of drywall," in *Proc. 12th Int. Conf. on Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, 2013, pp. 262-264.
32. M. Dyvak; N. Porplytsya; Y. Maslyiak and N. Kasatkina. Modified artificial bee colony algorithm for structure identification of models of objects with distributed parameters and control. *2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, Lviv, 2017, pp. 50-54.
33. M. Dyvak, N. Kasatkina, A. Pukas, N. Padletska. "Spectral analysis the information signal in the task of identification the recurrent laryngeal nerve in thyroid surgery". *Przegląd Elektrotechniczny*, vol. 89, no. 6, pp. 275- 277, 2013.
34. Porplytsya, N., Dyvak, M.: Interval difference operator for the task of identification recurrent laryngeal nerve. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE'2015)*, pp. 156-158 (2015).
35. Dyvak, M., Pukas, A., Oliynyk, I., Melnyk, A. Selection the 'Saturated' Block from Interval System of Linear Algebraic Equations for Recurrent Laryngeal Nerve Identification *Proceedings of the 2018 IEEE 2nd International Conference on Data Stream Mining and Processing, DSMP 2018*, 2018, pp. 444–448, 8478528
36. M. Dyvak, V. Manzhula, O. Kozak. New method tolerance estimation of the parameters set of interval model based on saturated block of ISLAE, *Proceeding of the IX-th International Conference CADSM'2007*, Lviv–Polyana, 2007, p. 376-379.