

<https://doi.org/10.31891/2219-9365-2023-73-1-14>

УДК 519.6:001.5

Дмитро ЛЕВКІН

Державний біотехнологічний університет

<https://orcid.org/0000-0002-1980-4426>

e-mail: dimalevkin23@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ КОРЕКТНОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОГО БІОТЕХНОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

В умовах невизначеності національної економіки актуальною є проблема раціонального використання енергетичних та інших ресурсів. З метою підвищення точності діагностики та контролю модельованих систем потрібна розробка нових високоточних програмно-апаратних засобів забезпечення технологічних і біотехнологічних процесів. Здійснюючи математичне моделювання стану досліджуваного об'єкта нетипової геометричної форми та багатошарової будови, неможливо гарантувати існування та єдиність розв'язку крайової задачі для диференціальних рівнянь. Для моделювання фізичних процесів в складних системах потрібно при побудові крайових задач з диференціальними рівняннями враховувати будову досліджуваного об'єкта і особливості випромінювачів. Однак, це підвищить складність реалізації крайових задач. Коректність крайових задач зумовлює коректність прикладних оптимізаційних математичних моделей задач пошуку оптимальних параметрів джерел дії з урахуванням обмежень на функцію мети та її параметри.

В статті здійснене математичне моделювання процесу лазерної дії на ембріон. Автором визначені та обгрунтовані умови коректності крайових задач, які описують стан модельованої біотехнологічної системи під дією сфокусованих джерел лазерного випромінювання. Для обгрунтування коректності крайової задачі використані методи з теорії псевдодиференціальних рівнянь в просторі узагальнених функцій степеневого зростання (спадання). Доведено, що символ псевдодиференціального рівняння є сумою експоненціально-коректного та підлеглого символів псевдодиференціальних операторів. Запропоновану в статті методику доцільно використати для обгрунтування коректності нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь, які описують стан інших технологічних та біотехнологічних систем, та прикладних оптимізаційних математичних моделей.

Ключові слова: крайова задача, коректність, оптимізація, біотехнологічна система.

Dmytro LEVKIN

State Biotechnological University

STUDY OF THE CORRECTNESS CONDITIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MULTILAYER BIOTECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

The problem of rational use of energy and other resources is relevant in the context of uncertainty of the national economy. In order to improve the accuracy of diagnostics and control of simulated systems, the development of new high-precision software and hardware for technological and biotechnological processes is required. Carrying out mathematical simulation of the state of the studied object of atypical geometric shape and multi-layer structure it is impossible to guarantee the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem for differential equations. To model physical actions in complex systems, it is necessary to take into account the structure of the object under study and peculiarities of emitters when constructing boundary value problems with differential equations. However, this will increase the complexity of the implementation of boundary value problems. Correctness of boundary value problems leads to correctness of applied optimization mathematical models of problems of search for optimal parameters of action sources taking into account restrictions on target function and its parameters.

In the article the mathematical modeling of the process of laser action on the embryo is carried out. The author has defined and substantiated the conditions of correctness of the boundary value problems describing the state of the modeled biotechnological system under the action of focused laser radiation sources. The methods on the theory of pseudo-differential equations in the space of generalized functions of degree growth (incidence) have been used for substantiating the correctness of the boundary value problem. It is proved that the symbol of a pseudodifferential equation is the sum of exponentially correct and subordinate symbols of pseudodifferential operators. It is reasonable to use the technique proposed in the article to substantiate the correctness of nonlocal boundary value problems for differential equations describing the state of other technological and biotechnological systems and applied optimization mathematical models.

Keywords: boundary value problem, correctness, optimization, biotechnological system.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

В статті розглянуті багатошарові біотехнологічні системи, які містять локальні, зосереджені джерела термічної дії. Ці системи містять рухомі джерела дії фізичного поля, характеристики якого входять або до правої частини основного рівняння крайової задачі, або до граничних умов. Відзначимо, що в якості розрахункових математичних моделей для них використовують крайові задачі з диференціальними рівняннями та відповідними початковими та граничними умовами. Ця специфіка значно ускладнює побудову відповідних математичних моделей оптимізації параметрів дії лазерного випромінювання на багатошарові мікробіологічні матеріали і їх застосування для підвищення якості біотехнологічного процесу ділення матеріалу.

Математичні моделі оптимізації параметрів рухомих джерел повинні ґрунтуватися на коректних постановках крайових задач. Тобто необхідно забезпечити існування та єдиність розв'язку крайової задачі і незначним змінам вихідних даних повинні відповідати незначні зміни розв'язку крайової задачі. Обґрунтування цих вимог необхідне для забезпечення адекватності оптимізаційної математичної моделі пошуку оптимальних технічних параметрів джерел термічного навантаження.

Гарантувати існування та єдиність розв'язку крайової задачі доцільно лише в разі простої просторової форми (коло, куля, сфера та ін.) та одношарової структури біологічного матеріалу. У цьому випадку коректність (існування та єдиність розв'язку) зумовлена традиційною теорією існування та єдиності розв'язку крайової задачі. В разі складної просторової форми, нелінійної, неоднорідної, нестационарної, багатшарової структури матеріалу, в основі розрахункової математичної моделі лежить крайова задача або задача Коші системи нестационарних, неоднорідних, багатовимірних диференціальних рівнянь теплопровідності з відповідними граничними умовам, для якої неможливо гарантувати коректність. Тому відповідні математичні моделі потрібно перевірити на коректність. Забезпечення виконання цих вимог дозволить отримати точний аналітичний розв'язок крайової задачі або скористатися тим чи іншим наближеним чисельним методом.

Застосувавши методи експертного оцінювання технічних параметрів лазерних випромінювачів, та, врахувавши дані про об'єкт дослідження (ембріон під дією лазерним променем), в статті запропоновано розрахункову математичну модель процесу дії лазерного променя на ембріон. Використавши спеціальні прийоми та методи з теорії псевдодиференціальних операторів у функціональних просторах, обґрунтована коректність крайової задачі. Отримані автором результати доцільно застосувати для обґрунтування коректності низки прикладних оптимізаційних математичних моделей пошуку оптимальних параметрів випромінювачів при дії на багатшарові матеріали.

Аналіз досліджень та публікацій

На актуальності досліджуваної тематики було наголошено в публікаціях [1–10]. В монографії [1] наведений огляд вже існуючих методик розрахунку та оптимізації параметрів технічних систем. Її авторами закладені основні принципи побудови математичних моделей і розробки програмно-апаратних засобів для певних ділянок розміщення джерел дії в матеріалі. Розроблений комплексний підхід до розв'язання прикладних задач інженерного проектування технічних систем [2]. Авторами цієї публікації запропоновані математичні моделі і методи для розв'язання задачі розміщення об'єктів довільної геометричної форми в фіксованій області. В публікаціях [3, 4] наведені математичні моделі і методи для підвищення ефективності функціонування логістичної системи вантажних перевезень сільськогосподарської продукції та біопалива в умовах ринкових відносин. Розроблені алгоритмічні основи для прийняття управлінських рішень в задачах екологічної та енергетичної безпеки в статті [5]. З метою прогнозування виникнення можливих ризиків в енергопостачанні та недопущення енергетичних криз в умовах ринкової економіки України авторами публікацій [6, 7] запропоновані методи для підтримки надійності електропостачання, спроектовані системи зниження вжитку електричної потужності в період максимального навантаження енергосистем. Здійснивши огляд найбільш актуальних інноваційних досліджень і технологій в агропромисловому комплексі України, авторами публікації [8] розрахована оцінка впровадження та застосування інновацій в агропромисловому комплексі України. Авторами публікацій [9, 10] розв'язана задача вдосконалення системи управління ризиками на сільськогосподарських підприємствах України. Розроблена економіко-математична модель системи прогнозування та обробки інформації про факти, які впливають на ризики, в статті [10].

Формулювання цілей статті

Метою роботи є: запропонувати методика до обґрунтування коректності математичних моделей для багатшарових біотехнологічних систем, які містять зосереджені, локальні джерела термічного навантаження.

Виклад основного матеріалу

Крайова задача для системи диференціальних рівнянь теплопровідності, які описують стан ембріона під дією лазерним променем:

$$\begin{cases} 5.46 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0.71 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + 55.02; \\ 5.44 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0.96 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + 94.1; \\ 5.3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = 0.94 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + 390.25; \\ 5.1 \frac{\partial T_4}{\partial t} = 0.91 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{2}{r_4} \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + 452.4. \end{cases} \quad (1)$$

Для врахування початку та кінця лазерної дії застосовані граничні умови Дірихле:

$$\begin{cases} T(0;0) = 100 \text{ } ^\circ\text{C}; \\ T(53;2550) = 37 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{cases} \quad (2)$$

Граничні умови теплового обміну:

$$-0,67 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0,t) = 4,4. \quad (3)$$

Запишемо граничні умови (2)–(3) в загальному виді:

$$B_0 \left(\frac{\partial}{i\partial r} \right) T(r,0) + B_1 \left(\frac{\partial}{i\partial r} \right) T(r,t_1) + B_2 \left(\frac{\partial}{i\partial r} \right) T(r,t_2) + B_3 \left(\frac{\partial}{i\partial r} \right) T(r,t_3) + B_4 \left(\frac{\partial}{i\partial r} \right) T(r,t_4) = \varphi(r) \quad (4)$$

Однорідну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь теплопровідності можна збурювати довільним псевдодиференціальним оператором першого порядку з досить малими коефіцієнтами,

наприклад, $R \left(t, r, \frac{\partial}{\partial r} \right) T(t, r) = \varepsilon \frac{\partial T(t, r)}{\partial r}$, $\varepsilon = \frac{2a}{r}$.

Символ оператора $R \left(t, r, \frac{\partial}{\partial r} \right)$ дорівнює $\frac{2ais}{r}$. Виконана оцінка, $R(r, \tau, s) < K$ при $r > \sigma$, де $m < h$.

Запишемо систему (1) в загальному виді:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0; \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} - \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + q_3 = 0; \\ \rho_4 c_4 \frac{\partial T_4}{\partial t} - \lambda_4 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{2}{r_4} \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + q_4 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $T_e(r, t)$ – температурне поле в шарах ембріона;

r_e, t_e – відстані, відповідно, просторової та часової координат;

ρ_e, c_e, λ_e – коефіцієнти густини, теплоємкості та теплопровідності точок в шарах ембріона;

q_e – питомий розподіл щільності потужності теплових навантажень.

Позначимо через $a = -\frac{\lambda}{\rho c}$ – коефіцієнт температуропровідності. Запишемо диференціальне рівняння теплопровідності з системи (5) в наступному виді:

$$P_0(r, D_t, D_r) T(r, t) + a P_1(r, D_t, D_r) T(r, t) = f(r, t). \quad (6)$$

Символ псевдодиференціального рівняння (6):

$$P(r, \tau, \eta) = i\tau + a\eta^2 - \frac{2a\eta}{r} = P_0(r, \tau, \eta) + P_1(r, \tau, \eta), \quad (7)$$

де $P_0(r, \tau, \eta) = i\tau + a\eta^2$;

$$P_1(r, \tau, \eta) = -\frac{2ai\eta}{r}.$$

Якщо $\text{Im } \tau < 0$, тоді поліном $P_0(r, \tau, \eta)$ буде експоненціально-коректним, для якого виконана умова сталої сили.

$$\text{Вирази } \frac{P_1(r, \tau, \eta)}{P_0(r, \tau, \eta)} = \frac{-\frac{2ai\eta}{r}}{i\tau + a\eta^2} \rightarrow 0 \text{ і } (D_n^\alpha D_r^\beta P_1(r, \eta)) / P_0(r, \eta) \rightarrow 0 \text{ рівномірно за змінними } r, (\text{Re } \tau, \eta),$$

якщо $\text{Im } \tau \rightarrow -\infty$, $r > \delta$. Отже $P_1(r, D)T = -\frac{2a}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$, підлеглий оператору $P_0(r, D)T = \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$.

Таким чином, отримали, що крайова задача (1)–(3) коректна в просторі обмежених на сегменті узагальнених функцій степеневого зростання. Слід також відзначити результати публікацій [11–13], де здійснене дослідження питань підвищення ефективності функціонування технічних і біотехнологічних систем.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі

У статті побудована розрахункова математична модель біотехнологічної системи (ембріон під дією лазерним променем), яка містить локальні, дискретні джерела термічного навантаження. Проаналізовані дослідження щодо забезпечення коректної постановки крайової задачі, яка лежить в основі розрахункової математичної моделі процесу термічної дії на ембріон. Автором доведено, що для забезпечення коректності крайової задачі символ псевдодиференціального рівняння теплопровідності повинен бути диференційованим і обмеженим поліномом. Результати досліджень даної роботи дуже важливі з тієї точки зору, що для забезпечення коректності тієї чи іншої прикладної оптимізаційної математичної моделі необхідна коректна постановка вихідної крайової задачі. Застосування результатів цієї статті дасть можливість підвищити ефективність використання енергетичних і теплових ресурсів при забезпеченні біотехнологічного процесу лазерної дії на ембріон.

Література

1. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. / Ю.Г. Стоян, В.П. Путятин. – Київ: Наукова думка, 1988. – С. 114–137.
2. Стоян Ю.Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. / Ю.Г. Стоян, Н.И. Гиль. – Київ: Наукова думка, 1976. – С. 122–152.
3. Бережна Н.Г. Проблеми транспортно-логістичного забезпечення в аграрній галузі. / [Бережна Н.Г., Біляєва О.С., Войтов В.А., Горяїнов О.М., Карнаух М.В., Кравцов А.Г., Кутя О.В., Музильов Д.О., Шраменко Н.Ю.] – Харків: Міськдрук, 2019. – С. 9–31.
4. Bogoslavskaya O.Yu. [The Impact of Fuel Delivery Logistics on the Cost of Thermal Energy on the Example of Biofuels Boilers in Ukraine](#). / O.Yu. Bogoslavskaya, V.V. Stanytsina, V.O. Artemchuk, O.V. Maevsky, O.M. Garmata, V.M. Lavrinenko, I.S. Zinovieva. // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2022. – Vol. 1049. – 012018. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/1049/1/012018>
5. Каменева І.П. Проблема інформативності та визначення інформативних структур для підтримки прийняття рішень в галузі екологічної безпеки. / І.П. Каменева, В.О. Артемчук. // Електронне моделювання. – 2022. – Т. 44. №3. – С. 50–64. <https://doi.org/10.15407/emodel.44.03.050>
6. Згуровець О.В. Ефективні методи управління споживанням електричної енергії. / О.В. Згуровець, Г.П. Костенко. // Проблеми загальної енергетики. – Київ, 2007. – № 2(16). – С. 75–80.
7. Дрьомін В.П. Аналіз витрат палива блоками ТЕС і можливостей їх економії при регулюванні електропостачання. / В.П. Дрьомін, Г.П. Костенко, О.В. Згуровець. // Проблеми загальної енергетики. – Київ, 2008. – № 1(17). – С. 73–77.
8. Tytarchuk I. Innovations financing in the agricultural sector. / I. Tytarchuk, Y. Nehoda, I. Shalyhina, N. Bazhanova, O. Horbachova, L. Rybina. // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology. – 2020. – Vol. 11. Issue. 4. – Pp. 246–255.
9. Суска А.А. Удосконалення системи управління ризиками на підприємстві. / А.А. Суска, Т.М. Харченко. // Вісник Харківського національного аграрного університету ім. В.В. Докучаєва. Серія: «Аграрні науки». – Харків, 2019. – № 2. – С. 254–263.
10. Levkina R.V. The economic-mathematical model of risk analysis in agriculture in conditions of uncertainty. / R.V. Levkina, I.I. Kravchuk, I.V. Sakhno, K.M. Kramarenko, A.A. Shevchenko. // Financial and credit activity: problems of theory and practice. – 2019. – Vol. 3. No. 30. – Pp. 248–255.

11. Kravtsov A. Development of a rheological model of stress relaxation in the structure of an oil film on the friction surface with fullerene additives. / A. Kravtsov, A. Suska, A. Biekurov, D. Levkin. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 3. No. 7 (111): Applied mechanics. – Pp. 93–99. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.235468>

12. Paliy A.P. Effect of various milking equipment on milk ejection in high-yielding cows. / A.P. Paliy, K.V. Ishchenko, V.V. Bredykhin, P.V. Gurskyi, D.A. Levkin, A.A. Antoniuk, A.Y. Opryshko, Y.O. Kovalchuk, O.A. Anastasieva, A.P. Paliy. // Ukrainian Journal of Ecology. – 2021. – Vol. 11. Issue. 1. – Pp. 18-24. doi: 10.15421/2020_303

13. Мегель Ю.Е. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы. / Ю.Е. Мегель, В.П. Путятин, Д.А. Левкин, А.В. Левкин. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: «Механіко-технологічні системи та комплекси». – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 20(1242). – С. 60–64.

References

1. Stoyan Yu.G. Optimizatsiya tehnikeskikh sistem s istochnikami fizicheskikh poley. / Yu.G. Stoyan, V.P. Putyatin. – Kyiv: Naukova dumka, 1988. – S. 114–137.

2. Stoyan Yu.G. Metody i algoritmyi razmescheniya ploskikh geometricheskikh ob'ektov. / Yu.G. Stoyan, N.I. Gil. – Kyiv: Naukova dumka, 1976. – S. 122–152.

3. Berezna N.G. Problemy transportno-logistychnogo zabezpechennia v agrarii galuzi. / [N.G. Berezna, O.S. Biliaieva, V.A. Voitov, O.M. Goriainov, M.V. Karnaukh, A.G. Kravtsov, O.V. Kutiya, D.O. Muzylov, N.Yu. Shramenko]. – Kharkiv: Miskdruk, 2019. – S. 9–31.

4. Bogoslavka O.Yu. [The Impact of Fuel Delivery Logistics on the Cost of Thermal Energy on the Example of Biofuels Boilers in Ukraine](https://doi.org/10.1088/1755-1315/1049/1/012018). / O.Yu. Bogoslavka, V.V. Stanytsina, V.O. Artemchuk, O.V. Maevsky, O.M. Garmata, V.M. Lavrinenko, I.S. Zinovieva. // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. –2022. – Vol. 1049. – 012018. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/1049/1/012018>

5. Kameneva I.P. Problema informatyvnosti ta vyznachennia informatyvnykh struktur dlia pidtrymky pryiniattia rishen v galuzi ekolohichnoi bezpeky. / I.P. Kameneva, V.O. Artemchuk. // Elektronne modelivannia. –2022. – Vol. 44. No. 3. – S. 50–64. <https://doi.org/10.15407/emodel.44.03.050>

6. Zghurovets O.V. Efektyvni metody upravlinnia spozhyvanniam elektrychnoi energii. / O.V. Zghurovets, H.P. Kostenko. // Problemy zagalnoi energetyky. – Kyiv, 2007. – No. 2(16). – S. 75–80.

7. Dromin V.P. Analiz vytrat palyva blokamy TES i mozhlyvosti yikh ekonomii pry reguluvanni elektropostachannia. / V.P. Dromin, G.P. Kostenko, O.V. Zghurovets. // Problemy zagalnoi energetyky. – Kyiv, 2008. – № 1(17). – S. 73–77.

8. Tytarchuk I. Innovations financing in the agricultural sector. / I. Tytarchuk, Y. Nehoda, I. Shalyhina, N. Bazhanova, O. Horbachova, L. Rybina. // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology. – 2020. – Vol. 11. Issue. 4. – Pp. 246–255.

9. Suska A.A. Udoshkonalennia systemy upravlinnia ryzykamy na pidpriemstvi. / A.A. Suska, T.M. Kharchenko. // Visnyk Kharkivskogo natsionalnogo agrarnogo univetsytetu im. V.V. Dokuchaieva. Serii: «Agrarni nauky». – Kharkiv, 2019. – № 2. – S. 254–263.

10. Levkina R.V. The economic-mathematical model of risk analysis in agriculture in conditions of uncertainty. / R.V. Levkina, I.I. Kravchuk, I.V. Sakhno, K.M. Kramarenko, A.A. Shevchenko. // Financial and credit activity: problems of theory and practice. – 2019. – Vol. 3. No. 30. – Pp. 248–255.

11. Kravtsov A. Development of a rheological model of stress relaxation in the structure of an oil film on the friction surface with fullerene additives. / A. Kravtsov, A. Suska, A. Biekurov, D. Levkin. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – Vol. 3. No. 7 (111): Applied mechanics. – Pp. 93–99. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.235468>

12. Paliy A.P. Effect of various milking equipment on milk ejection in high-yielding cows. / A.P. Paliy, K.V. Ishchenko, V.V. Bredykhin, P.V. Gurskyi, D.A. Levkin, A.A. Antoniuk, A.Y. Opryshko, Y.O. Kovalchuk, O.A. Anastasieva, A.P. Paliy. // Ukrainian Journal of Ecology. – 2021. – Vol. 11 Issue. 1. – Pp. 18-24. doi: 10.15421/2020_303

13. Мегель Ю.Е. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы. / Ю.Е. Мегель, В.П. Путятин, Д.А. Левкин, А.В. Левкин. // Visnyk Natsionalnogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats. Serii: «Mekhaniko-tekhnolohichni systemy ta komplekсы». – Kh.: NTU «KhPI», 2017. – № 20(1242). – S. 60–64.